Lösung 6

Aufgabe 1

Finde eine Isometrie von $\mathbb{H}^2 = (B_1, d_{\mathbb{H}^2})$, die den Punkt 0 nach $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ sendet. Wie viele solche Isometrien gibt es?

Lösung:

Aus Serie 4, Aufgabe 3 wissen wir, dass für $a \in (-1, 1)$ die Transformation

$$f(z) = \frac{z + a}{az + 1}$$

die Einheitsscheibe erhält und den Punkt 0 nach $a \in \mathbb{C}$ sendet. Um den Punkt $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ zu erreichen, können wir also zuerst f_a für ein geeignetes a anwenden und dann rotieren (mit Multiplikation der Form $e^{i\varphi}$ für $\varphi = \pi/4$). Damit das funktioniert, sollten wir

$$a = \left|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

wählen. Unsere Transformation ist also

$$g(z) = f_a(z)e^{i\varphi}$$

und wir schreiben sie als Möbiustransformation

$$g(z) = \frac{z + a}{az + 1}e^{i\varphi} = \frac{\frac{1}{a}z + 1}{z + \frac{1}{a}}e^{i\varphi} = \frac{\frac{1}{a}e^{i\varphi}z + e^{i\varphi}}{z + \frac{1}{a}} = \frac{(1 + i)z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{z + \sqrt{2}}$$

wobei wir

$$e^{i\varphi} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

verwendet haben. Wir überprüfen $g(0) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ und wissen, dass die Möbiustransformationen, die $\mathbb{H}^2$ erhalten genau die Isometrien von $\mathbb{H}$ sind. Also ist g die gesuchte Isometrie.

Wir bemerken, dass es undenlich viele solche Isometrien gibt. Nämlich können wir für jedes $\psi \in (0, 2\pi)$ die Rotation um den Winkel ψ vor g ausführen. Die Isometrien

$$g_\psi(z) = g(e^{i\psi}z)$$

sind alles unterschiedliche Isometrien, die aber alle $g_\psi(0) = g(0) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ erfüllen. Sie sind unterschiedlich, wie man durch einsetzen eines Punktes, wie $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ bemerken kann.

Aufgabe 2

Wir bemerken, dass das Oktaeder in Abbildung 1 auf die Sphäre S^2 projeziert werden kann. Das Oktaeder entspricht somit einer Kachelung der Sphäre. In Abbildung 2 ist eine Kachelung der hyperbolischen Ebene dargestellt. Beantworte für die Kachelungen von S^2 und $\mathbb{H}^2$ die folgenden Fragen.

(1) Aus wievielen Dreiecken bestehen die Kachelungen?

(2) Wieviele Dreiecke treffen sich jeweils an einem Eckpunkt?

(3) Wie viele Elemente hat die Symmetriegruppe der Kachelung?

(4) Wie viele Elemente hat die Untergruppe, die einen Eckpunkt eines Dreiecks fixiert?

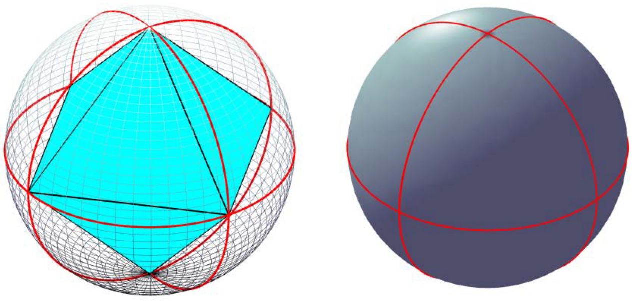

Abbildung 1: Der Oktaeder kann als Kachelung der Sphäre verstanden werden.

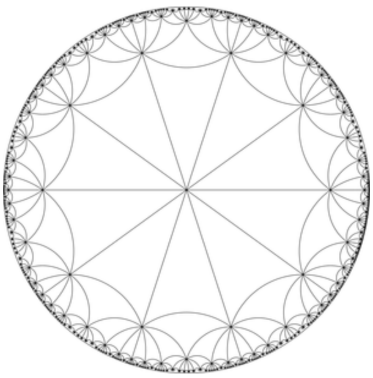

Abbildung 2: Eine Kachelung der hyperbolischen Ebene in Dreiecke.

Lösung:

(1) Das Oktaeder heisst so, weil es aus acht Dreiecksflächen besteht. Die Kachelung in der hyperbolischen Ebene hat unendlich viele hyperbolische Dreiecke.

(2) In den Bildern sieht man, dass sich beim Oktaeder jeweils 4 Dreiecke an einem Punkt treffen. In der hyperbolischen Ebene sind es jeweils 10 Dreiecke um jeden Punkt.

(3) Die Symmetriegruppe des Oktaeders können wir wie folgt berechnen: Wir bemerken zuerst, dass genau 8 Gruppenelemente den obersten Eckpunkt fixieren, nämlich die Identität, drei Rotationen ($90°, 180°$ und $270°$) und vier Spiegelungen (zwei entlang den roten Linien, und zwei die jeweils die Roten Linien austauschen). Wir beweisen nicht, dass dies alle sind, aber können es intuitiv glauben. Diese acht Symmetrien sind jedoch noch nicht alle, denn der oberste Eckpunkt kann auch auf einen anderen abgebildet werden. Es gibt 6 Eckpunkte und für jeden Eckpunkt E gibt es wieder acht Symmetrien, die den obersten Eckpunkt auf E abbilden (führe zuerst eine der 8 Symmetrien aus und sende dann den obersten Eckpunkt auf E). Insgesamt gibt es also $8 \cdot 6 = 48$ Elemente in der Symmetriegruppe der Kachelung des Oktaeders.

Für die Kachelung der hyperbolischen Ebene sehen wir, dass jedes Dreieck auf jedes andere Dreieck abgebildet werden kann, also gibt es unendlich viele Elemente in der Symmetriegruppe.

(4) In (3) haben wir schon diskutiert wieviele Elemente einen Eckpunkt des Oktaeders fixieren, nämlich genau acht.

In der Kachelung der hyperbolischen Ebene untersuchen wir die Symmetrien, die den Mittelpunkt fixieren. Es gibt die Identität und neun Rotationen (Winkel $n2\pi/10$ für $n \in \{1, 2 \ldots, 9\}$) und es gibt auch noch 10 Spiegelungen, davon die Hälfte an einer Geraden die eingezeichnet ist und die andere Hälfte an Geraden, die durch die Mittelpunkte der anschliessenden Dreiecke gehen. Insgesamt gibt es also 20 Elemente in der Untergruppe, die den mittleren Eckpunkt fixiert. Alle Dreiecke in der Kachelung sind gleich gross (in der hyperbolischen Metrik) und haben gleich viele andere Dreiecke rundherum. Also gibt es gleich viele Elemente egal welchen Eckpunkt wir wählen.

Aufgabe 3

Sei p ein Punkt in einer Kreisscheibe. Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal das Bild von p unter der Inversion am Kreis.
Tipp: Zeichne zwei Geraden, die sich in p schneiden und überlege, was die Inversion mit den beiden Geraden macht.

Lösung:

Wir wählen drei Punkte auf dem Kreis und konstruieren jeweils die Mittelsenkrechten zwischen je zwei von ihnen. Diese drei Geraden schneiden sich in einem Punkt M, nämlich dem Mittelpunkt des Kreises. Jetzt zeichnen wir eine Gerade g von M durch den Punkt p und wissen, dass das Bild von p unter der Inversion auf g liegen muss.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt q, der nicht auf g liegt und zeichnen eine Gerade h durch p und q. Da p innerhalb des Kreises liegt, schneidet h den Kreis in zwei Punkten, wir nennen sie P und Q. Da h ein V-Kreis ist und Kreisinversionen V-Kreise auf V-Kreise abbilden, wissen wir, dass die Inversion von h auch wieder ein V-Kreis sein muss. Da h eine Gerade ist, enthält sie ∞, wenn man sie als Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ sieht. Die Kreisinversion sendet ∞ auf den Mittelpunkt M des Kreises, also muss die Inversion von h ebenfalls durch M gehen. Andererseits wissen wir, dass die Inversion P und Q fixiert, da sie auf dem Kreis liegen. Also muss die Inversion von h auch P und Q enthalten. Ein V-Kreis ist durch drei Punkte vollständig definiert und wir sehen, dass die Inversion von h ein Kreis k ist, der die Punkte P, Q und M enthält. Mit Zirkel und Lineal können wir wieder den Mittelpunkt von k konstruieren (mit Mittelsenkrechten) und k mit dem Zirkel abtragen. Da $p \in h$, wissen wir, dass die Inversion von p auf k liegen muss. Jetzt schneiden sich k und g in zwei Punkten, einer davon ist M und somit muss der andere die Inversion von p sein.