Prüfung Geometrie HS 2021

Aufgabe 1 **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

1. Sei γ eine Kurve in einem metrischen Raum, die lokal Längen minimiert. Dann minimiert auch jede Teilkurve von γ lokal Längen.
2. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann ist auch (X, d^2) ein metrischer Raum.
3. Wenn die drei Winkel zweier sphärischen Dreiecke gleich gross sind, dann ist ihr Flächeninhalt gleich.
4. Die Transformation $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, f(z) = (\overline{z}+1)/(\overline{z}-1)$ ist orientierungserhaltend.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Sei K ein Kreis in $\mathbb{C}$ und E ein V-Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$, der K in zwei Punkten jeweils in einem $90°$-Winkel schneidet. Zeigen Sie, dass E von der Inversion an K auf sich selber abgebildet wird.

Aufgabe 3 **[4 Punkte]**

Sei $\mathbb{H}^2$ die Poincaré-Scheibe. Sei C der Kreis mit Mittelpunkt $1+i \in \mathbb{C}$ und Radius 1. Sei α die hyperbolische Geodäte $C \cap \mathbb{H}^2$. Finden Sie den hyperbolischen Abstand von 0 zum nächsten Punkt auf α.

Aufgabe 4 **[4 Punkte]**

Sei $\mathbb{H}^2$ die Poincaré-Scheibe. Finden Sie eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$, die den Punkt $-\frac{1}{2} \in \mathbb{H}^2$ nach $+\frac{1}{2} \in \mathbb{H}^2$ sendet und den Nullpunkt nicht fixiert.

Aufgabe 5 **[4 Punkte]**

Wir erinnern uns, dass $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die erweiterte komplexe Ebene ist. Sei $\hat{\sigma}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die übliche stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0,0,1)$ aus. Sei $\hat{\rho}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die stereographische Projektion vom *Südpol* $S = (0,0,-1)$ aus. Finden Sie eine explizite Formel für die Abbildung $\hat{\sigma} \circ \hat{\rho}^{-1}$.