Prüfung Geometrie HS 2021

Aufgabe 1 **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

1. Sei γ eine Kurve in einem metrischen Raum, die lokal Längen minimiert. Dann minimiert auch jede Teilkurve von γ lokal Längen.
2. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann ist auch (X, d^2) ein metrischer Raum.
3. Wenn die drei Winkel zweier sphärischen Dreiecke gleich gross sind, dann ist ihr Flächeninhalt gleich.
4. Die Transformation $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, f(z) = (\overline{z} + 1)/(\overline{z} - 1)$ ist orientierungserhaltend.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Lösung:
1. WAHR, 2. FALSCH, zum Beispiel $X = \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$, dann ist die Dreiecksungleichung nicht erfüllt $4 = d^2(0, 2) \not\leq d^2(0, 1) + d^2(1, 2) = 2$. 3. WAHR, 4. FALSCH.

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Sei K ein Kreis in $\mathbb{C}$ und E ein V-Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$, der K in zwei Punkten jeweils in einem $90°$-Winkel schneidet. Zeigen Sie, dass E von der Inversion an K auf sich selber abgebildet wird.

Lösung:

Seien p, q die Schnittpunkte von K und E. Sei M der Mittelpunkt von K. Wir können eine Möbiustransformation A finden, mit $A(M) = 0, A(p) = (0, 1), A(q) = (0, -1)$, wegen der Trippeltransitivität. Wir wissen, dass die Inversion am Kreis K gegeben ist durch $A^{-1}IA$, wobei I die Inversion an S^1 ist. Da A rechte Winkel erhält muss $A(E)$ auch senkrecht zu S^1 stehen. Somit muss $A(E)$ die y-Achse sein. Die Inversion an S^1 erhält die y-Achse, wir bekommen also $A^{-1}IA(E) = A^{-1}A(E) = E$, wie gewünscht.

Aufgabe 3 **[4 Punkte]**

Sei $\mathbb{H}^2$ die Poincaré-Scheibe. Sei C der Kreis mit Mittelpunkt $1 + i \in \mathbb{C}$ und Radius 1. Sei α die hyperbolische Geodäte $C \cap \mathbb{H}^2$. Finden Sie den hyperbolischen Abstand von 0 zum nächsten Punkt auf α.

Lösung:
Sei p der Punkt, der auf α und auf der Geraden $y = x$ in $\mathbb{H}^2$ liegt. Der kleinste Abstand ist $d_{\mathbb{H}^2}(0, \alpha) = d_{\mathbb{H}^2}(0, p)$, **da der Abstand rotationssymmetrisch um** 0 **ist.** Der Euklidische Abstand kann berechnet werden als

$$d_E(0, p) = \sqrt{2} - 1.$$

Aus der Vorlesung haben wir eine Formel für den Abstand von zwei Punkten $a \leq b$ auf der x-Achse in $\mathbb{H}^2$

$$d_{\mathbb{H}^2}(a, b) = \log\left(\frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)}\right).$$

Wegen der Rotationssymmetrie der Distanzfunktion $d_{\mathbb{H}^2}$ folgt, dass

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(0, p) = d_{\mathbb{H}^2}(0, \sqrt{2} - 1) &= \log\left(\frac{1 + \sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2} + 1}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) \\ &= \log\left(\frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}\right) = \log(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 **[4 Punkte]**

Sei $\mathbb{H}^2$ die Poincaré-Scheibe. Finden Sie eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$, die den Punkt $-\frac{1}{2} \in \mathbb{H}^2$ nach $+\frac{1}{2} \in \mathbb{H}^2$ sendet und den Nullpunkt nicht fixiert.

Lösung:
Wir wenden zwei mal die Transformation

$$f(z) = \frac{z + a}{az + 1}$$

mit $a = \frac{1}{2}$ an, um den Punkt um eine Einheit entlang der x-Achse zu verschieben.

Wir berechnen $f^2(z)$.

$$f^2(z) = \frac{f(z) + a}{af(z) + 1} = \frac{\frac{z+a}{az+1} + a}{a\frac{z+a}{az+1} + 1} = \frac{\frac{z+a+a^2z+a}{az+1}}{\frac{az+a^2+az+1}{az+1}} = \frac{(1 + a^2)z + 2a}{2az + a^2 + 1} = \frac{5z + 4}{4z + 5}$$

Wir überprüfen, dass

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{5}{8} + i}{-\frac{1}{2}i + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}$$

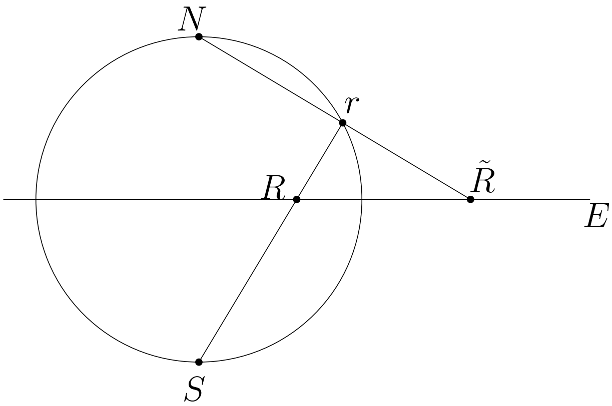
wie gewünscht. Wir müssen noch sicher stellen, dass der x-Achsenabschnitt nicht fixiert wird. Wir wählen den Punkt 0 auf der x-Achse und bekommen

$$g(0) = \frac{i}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Aufgabe 5 **[4 Punkte]**

Wir erinnern uns, dass $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die erweiterte komplexe Ebene ist. Sei $\hat{\sigma}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die übliche stereographische Projektion vom Nordpol $N = (0,0,1)$ aus. Sei $\hat{\rho}\colon S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die stereographische Projektion vom *Südpol* $S = (0,0,-1)$ aus. Finden Sie eine explizite Formel für die Abbildung $\hat{\sigma} \circ \hat{\rho}^{-1}$.

Lösung:
Sei $(X,Y) = (R\cos(t), R\sin(t)) \in E$. Wir möchten $\sigma \circ \tilde{\sigma}^{-1}(X,Y) =: (\tilde{X},\tilde{Y}) = (\tilde{R}\cos(t), \tilde{R}\sin(t))$ berechnen. (Bemerke, dass es kein $\tilde{t}$ braucht, da die Projektionen den Winkel nicht verändern.) Es reicht daher, wenn wir uns die Situation 2D vorstellen und $\tilde{R}$ in Abhängigkeit von R ausrechnen.



Wir bemerken zuerst, dass für $R = 0$ gilt $\sigma \circ \tilde{\sigma}^{-1}(R) = \sigma(N) = \infty$.

Wir nehmen also an, wir haben $R > 0$ gegeben und möchten r ausrechnen. Die Gerade $\overline{SR}$ hat die Form $y = mx + q$, wobei $q = -1$. Da R auf der Gerade liegt $0 = mR - 1$, finden wir heraus, dass

$$m = \frac{1}{R},$$

also gilt $y = \frac{x}{R} - 1$. Wenn jetzt (x,y) auch noch auf dem Kreis liegen soll, gilt $x^2 + y^2 = 1$, also

$$\begin{gathered} x^2 + \left(\frac{x-R}{R}\right)^2 = \\ R^2x^2 + x^2 - 2Rx + R^2 = R^2 \\ x(R^2+1) - 2R = 0 \\ x = \frac{2R}{1+R^2} \end{gathered}$$

wobei wir verwendet haben, dass $R \neq 0$. Wir sehen auch, dass

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - x^2 = 1 - \left(\frac{2R}{1+R^2}\right)^2 = \frac{(1+R^2)^2 - 4R^2}{(1+R^2)^2} = \frac{(1-R^2)^2}{(1+R^2)^2} \\ y &= \frac{1-R^2}{1+R^2}. \end{aligned}$$

Für die zweite Projektion haben wir wieder eine Geradengleichung der Form $y = \tilde{m}x + \tilde{q}$. Wir sehen sofort, dass $\tilde{q} = 1$. Wir bemerken, dass sich bei r

ein rechter Winkel befindet (Satz von Thales) und können daher sofort schliessen, dass

$$\tilde{m} = -\frac{1}{m} = -R.$$

Alternativ könnte man das auch wieder durch einsetzen ausrechnen, dann müsste man aber noch die y-Koordinate von r ausrechnen. Der Punkt $\tilde{R}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} 0 &= -R\tilde{R} + 1, \\ \tilde{R} &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Bei der Transformation $\sigma \circ \tilde{\sigma}^{-1}$ handelt es sich also um die Inversion am Kreis:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tilde{\sigma}^{-1} \colon E &\to E \\ (X, Y) &\mapsto \left(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}\right) \\ (0,0) &\mapsto \infty \\ \infty &\mapsto (0,0) \end{aligned}$$