Repetitionsprüfung Geometrie HS 2021

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

1. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit der Pfadlängen-Metrik ist ein metrischer Raum.
2. Die Fläche von Dreiecken, die den Nordpol nicht enthalten, wird durch die stereographische Projektion erhalten.
3. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 2\bar{z} + 1$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.
4. Sei γ ein Pfad der aus zwei längenminimierenden Pfaden zusammengesetzt ist. Dann ist γ lokal längenminimierend.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Aufgabe 2 [3 Punkte]

Wir betrachten vier sphärischen Dreiecke auf S^2 wie in Abbildung 2 dargestellt. Finden Sie den gesamten Flächeninhalt der vier Dreiecke (in Abhängigkeit des Winkels α).

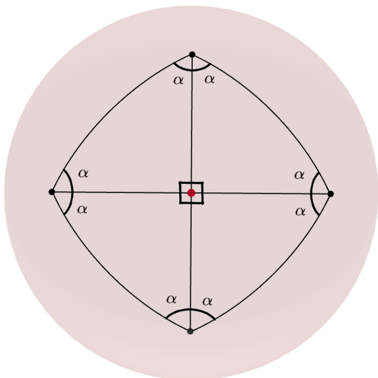

Abbildung 1: Vier isometrische sphärische Dreiecke mit rechten Winkeln in der Mitte (rot) und jeweils dem Winkel α bei den anderen Eckpunkten (schwarz).

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei $\mathbb{H}^2$ das Poincaré-Disk-Modell der hyperbolischen Ebene. Wir betrachten die Punkte $p = 0, q = 3/5 \in \mathbb{H}^2$. Finden Sie den hyperbolischen Mittelpunkt zwischen p und q, das heisst den eindeutigen Punkt r auf der Geodäte von p nach q mit $d_{\mathbb{H}^2}(p, r) = d_{\mathbb{H}^2}(r, q)$.

Aufgabe 4 **[2+3 Punkte]**

Sei T_a die Translation um $a \in \mathbb{C}$, M_b die Multiplikation mit $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $I(z) = 1/z$ der Kehrwert.

a) Finden Sie $a, b \in \mathbb{C}$, so dass die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z+3}{z}$$

von der Form $f = T_a \circ I \circ M_b$ ist.

b) Zeigen Sie, dass jede orientierungserhaltende Möbiustransformation f geschrieben werden kann als

$$f = T_a \circ I \circ M_b \circ T_c \quad \text{oder} \quad f = T_a \circ M_b$$

für geeignete $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5 **[4 Punkte]**

Sei $\mathbb{H}^2$ das Poincaré-Disk-Modell der hyperbolischen Ebene. Seien D und D' zwei ideale hyperbolische Dreiecke (alle drei Eckpunkte liegen auf dem Rand S^1). Zeigen Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ gibt, die D auf D' abbildet.

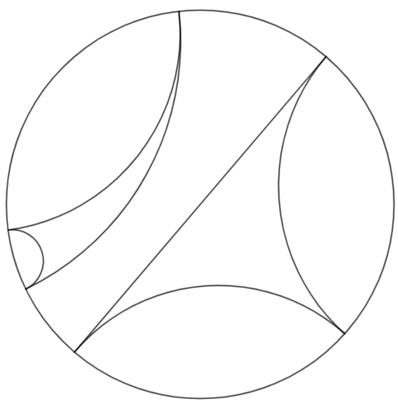

Abbildung 2: Zwei ideale Dreiecke in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$.