Repetitionsprüfung Geometrie HS 2021

Aufgabe 1 **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

1. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit der Pfadlängen-Metrik ist ein metrischer Raum.
2. Die Fläche von Dreiecken, die den Nordpol nicht enthalten, wird durch die stereographische Projektion erhalten.
3. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 2\bar{z} + 1$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.
4. Sei γ ein Pfad der aus zwei längenminimierenden Pfaden zusammengesetzt ist. Dann ist γ lokal längenminimierend.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Lösung:
1. FALSCH, die Teilmenge muss Pfad-zusammenhängend sein. 2. FALSCH, es gibt Dreiecke in der Ebene, die beliebig grossen Flächeninhalt haben und trotzdem nicht bis ∞ gehen. 3. WAHR, der Skalierungsfaktor ist 2. 4. FALSCH, In $\mathbb{R}^2$ kann man zwei geodätische Segmente zusammenfügen, die einen rechten Winkel dazwischen haben.

Aufgabe 2 **[3 Punkte]**

Wir betrachten vier sphärischen Dreiecke auf S^2 wie in Abbildung 2 dargestellt. Finden Sie den gesamten Flächeninhalt der vier Dreiecke (in Abhängigkeit des Winkels α).

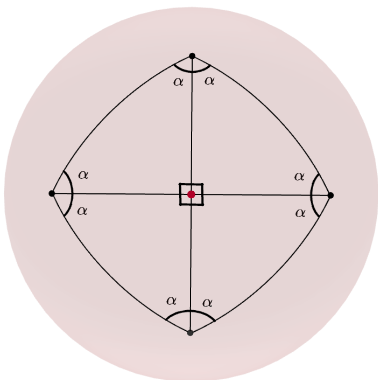

Abbildung 1: Vier isometrische sphärische Dreiecke mit rechten Winkeln in der Mitte (rot) und jeweils dem Winkel α bei den anderen Eckpunkten (schwarz).

Lösung:
Wir kennen die Formel für den Flächeninhalt A von einem Dreieck mit Winkeln $\pi/2$, α, α. Es ist $A = \pi/2 + 2\alpha - \pi = 2\alpha - \pi/2$. Insgesamt ist die Fläche also $4A = 8\alpha - 2\pi$.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei $\mathbb{H}^2$ das Poincaré-Disk-Modell der hyperbolischen Ebene. Wir betrachten die Punkte $p = 0, q = 3/5 \in \mathbb{H}^2$. Finden Sie den hyperbolischen Mittelpunkt zwischen p und q, das heisst den eindeutigen Punkt r auf der Geodäte von p nach q mit $d_{\mathbb{H}^2}(p, r) = d_{\mathbb{H}^2}(r, q)$.

Lösung:
Für einen Punkt $r \in (0, 1)$ gilt

$$d_{\mathbb{H}^2}(0, r) = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

und wir suchen einen Punkt r mit $d_{\mathbb{H}^2}(0, q) = 2d_{\mathbb{H}^2}(0, r)$, was heisst

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}\right) &= 2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \\
\log\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}\right) &= \log\left(\frac{(1+r)^2}{(1-r)^2}\right) \\
4 &= \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} \\
\pm 2 &= \frac{(1+r)}{(1-r)} \\
\pm 2 \mp 2r &= 1 + r \\
r = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad r &= 3.
\end{aligned}$$

Da $r \in (0, 1)$, ist also $r = 1/3$ der Mittelpunkt.

Aufgabe 4 [2+3 Punkte]

Sei T_a die Translation um $a \in \mathbb{C}$, M_b die Multiplikation mit $b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $I(z) = 1/z$ der Kehrwert.

a) Finden Sie $a, b \in \mathbb{C}$, so dass die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z+3}{z}$$

von der Form $f = T_a \circ I \circ M_b$ ist.

b) Zeigen Sie, dass jede orientierungserhaltende Möbiustransformation f geschrieben werden kann als

$$f = T_a \circ I \circ M_b \circ T_c \quad \text{oder} \quad f = T_a \circ M_b$$

für geeignete $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) Wir finden $a = 1, b = 1/3$, so dass

$$f(z) = T_1 \circ I \circ M_{1/3}(z).$$

b) Wir wissen, dass alle orientierungserhaltenden Möbiustransformationen von der Form

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

sind ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$), wobei $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Falls $\gamma = 0$, dann ist

$$f(z) = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta} = T_{\alpha/\delta} \circ M_{\beta/\delta}(z)$$

eine Ähnlichkeitstransformation. Wenn $\gamma \neq 0$, dann formen wir um:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} &= \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma z}{\gamma z + \delta} + \frac{\beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma z + \delta}{\gamma z + \delta} + \frac{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}{\gamma z + \delta} \\
&= \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\frac{\gamma}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta} z + \frac{\delta}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}} \\
&= \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\frac{\gamma}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}\left(z + \frac{\delta}{\gamma}\right)} = T_{\alpha/\gamma} \circ I \circ M_{\frac{\gamma}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}} \circ T_{\delta/\gamma}(z)
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\gamma \neq 0$ und $\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta \neq 0$.

Aufgabe 5 [4 Punkte]

Sei $\mathbb{H}^2$ das Poincaré-Disk-Modell der hyperbolischen Ebene. Seien D und D' zwei ideale hyperbolische Dreiecke (alle drei Eckpunkte liegen auf dem Rand S^1). Zeigen Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ gibt, die D auf D' abbildet.

Lösung:

Seien $A, B, C \in S^1$ die Eckpunkte von D und A', B', C' die Eckpunkte von D'. Wir bemerken, dass die Dreiecke D und D' durch ihre Eckpunkte vollständig definiert sind, da es genau eine Geodäte (Kreissegment senkrecht zum Rand) gibt, die jeweils zwei Punkte am Rand verbindet.

Wir verwenden die Tripel-Transitivität der Möbiustransformationen auf der Riemann-Sphere: Es gibt eine Möbiustransformation f, die $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$ sendet. Da V-Kreise durch drei Punkte schon vollständig definiert sind, wird der Einheitskreis auf den Einheitskreis gesendet. Wir betrachten nun zwei Fälle:

1) Falls ein Punkt von $\mathbb{H}^2$ von f wieder in $\mathbb{H}^2$ gesendet wird, dann werden wegen der Stetigkeit von Möbiustransformationen alle Punkte $\mathbb{H}^2$ nach $\mathbb{H}^2$

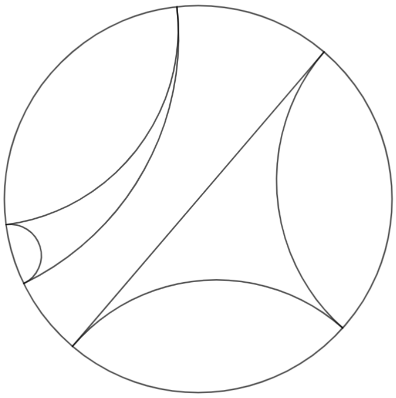

Abbildung 2: Zwei ideale Dreiecke in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$.

abgebildet. Somit ist $f|_{\mathbb{H}^2} \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ eine Isometrie der hyperbolischen Ebene, die das ideale Dreieck D auf D' abbildet.

2) Falls ein Punkt von $\mathbb{H}^2$ von f ausserhalb der Einheitsscheibe landet, dann bemerken wir, dass $J \circ f$ (wobei J die Inversion an S^1 ist) eine Möbiustransformation ist, die einen Punkt von $\mathbb{H}^2$ nach $\mathbb{H}^2$ sendet. Ausserdem fixiert J alle Punkte auf S^1, also gilt $J \circ f(A) = A', J \circ f(B) = B', J \circ f(C) = C'$ und wir können wie in Fall 1) argumentieren, dass $J \circ f|_{\mathbb{H}^2} \colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ eine Isometrie der hyperbolischen Ebene ist, die D auf D' abbildet.