Serie 11

POLYNOMRINGE, EUKLIDISCHE RINGE

69. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $R[X,Y]$ der Polynomring in den zwei Variabeln X und Y. Zeige, dass das Ideal (X,Y) kein Hauptideal ist.

70. Sei $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, und sei $\varphi : R \to S$ mit $a \mapsto (a,a)$ ein Ringhomomorphismus. Für $s_0 \in S$ sei $\varphi_{s_0} : R[X] \to S$ wie im Theorem 12.3. Zeige, dass alle Elemente aus S algebraisch über R sind.

Ein Integritätsring R heiss **euklidisch**, wenn eine Abbildung $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft:

Für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren $q, r \in R$, sodass $a = b \cdot q + r$ mit $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$.

71. Zeige:

(a) Jeder euklidische Ring ist Hauptidealring.

(b) $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sind euklidisch.

72. (a) Verallgemeinere den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggT zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ auf euklidische Ringe.

(b) Berechne einen ggT von $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Stelle den ggT aus (b) als Linearkombination (mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[X]$) der beiden Polynome $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ dar.

(d) Finde mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den ggT der Polynome

$$-3XY + 3X^2Y + Y^2 - 4XY^2 + Y^3 \quad \text{und} \quad -2X + 2X^2 - Y - XY - Y^2$$

in $\mathbb{Z}[X,Y]$.

73. Zeige: $X^3 - X$ hat 6 Nullstellen in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.