Serie 12

Endliche Körper, Faktorielle Ringe

74. (a) Konstruiere einen Körper mit 5^2 Elementen.
Hinweis: Suche im Ring $\mathbb{F}_5[X]$ ein Polynom p vom Grad 2, sodass (p) ein Primideal ist, und betrachte $\mathbb{F}_5[X]/(p)$.

(b) Konstruiere einen Körper mit 2^5 Elementen.

75. Bestimme die Einheitengruppe des Rings $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.

76. Zeige: Ist R ein Integritätsring und $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

77. Zeige: In einem faktoriellen Ring ist jedes irreduzible Element ein Primelement.

78. Sei K ein Körper. Finde alle maximalen Ideale in $K[X]$.

79. (a) Die komplexe Zahl $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.
Finde ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathbb{Q}[\omega] \simeq \mathbb{Q}[X]/\mathfrak{a}$.

(b) Die reelle Zahl $t = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.
Finde ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ mit $\mathbb{Q}[t] \simeq \mathbb{Q}[X]/\mathfrak{a}$.