Serie 3

GRUPPENOPERATIONEN

21. Zeige: Gilt $N \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$ und ist G/N zyklisch, so ist G abelsch.

22. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

(a) Zeige, dass die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$ eine Gruppenoperation definiert.

(b) Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Das bedeutet, dass die Operation nur eine Bahn besitzt.

(c) Bestimme ihre Stabilisatoren.

23. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen operiere auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$g \circ (a, b) = \left(ga, \frac{b}{g}\right),$$

wobei $g \in \mathbb{R}^*$ und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

24. Sei $G \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei f eine Auswahlfunktion auf der Menge der Bahnen M/G, *d.h.* $f\colon M/G \to M$ und für jedes $N \in M/G$ ist $f(N) \in N$.

Zeige, dass gilt

$$|M| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big] .$$

25. Sei $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \circ x$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{lcl} G \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ (g\,,\, f) & \mapsto & g * f \quad \text{mit } (g * f)(x) := f(g^{-1} \circ x) \end{array}$$

eine Gruppenoperation ist und bestimme ihre Fixpunkte.

26. Wir mischen drei identische Kartendecks mit je 36 paarweise verschiedenen Karten. Wie viele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?

27. Wir betrachten eine geschlossene Perlenkette mit 13 Perlen. Wir wollen die Perlen mit 4 Farben einfärben. Wie viele Kombinationen von Färbungen gibt es? Wie viele Kombinationen gibt es, falls wir nur 12 Perlen färben wollen?