

Serie 6

SYLOWSÄTZE, PERMUTATIONSGRUPPEN

- 41.** *Satz von Cauchy.* Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl, die die Gruppenordnung von G teilt. Dann existiert ein $a \in G$ mit $\text{ord}(a) = p$.
Hinweis: Verwende Faktum 3.4 aus der Vorlesung.
- 42.** Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 100 nicht sowohl eine zu C_4 isomorphe als auch eine zu $C_2 \times C_2$ isomorphe Untergruppe besitzen kann.
- 43.** Zeige, dass eine Gruppe der Ordnung 40 oder 56 nie einfach ist.
- 44.** (a) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Tetraedergruppe.
(b) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Würfelgruppe.
(c) Bestimme die Anzahl aller Sylowuntergruppen der Dodekaedergruppe.
- 45.** *Satz von Cayley.* Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n .
- 46.** Ein 2-Zykel heisst *Transposition* und eine *elementare Transposition* ist eine Transposition der Form $(i, i + 1)$. Zeige, dass folgendes gilt:
(a) Jede Transposition kann als Produkt von elementaren Transpositionen geschrieben werden.
(b) Jeder Zykel kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.
(c) Jeder Zykel in S_n kann als ein Produkt mit den beiden Zyklen $(1\ 2)$ und $(1\ \dots\ n)$ geschrieben werden.