Serie 7

PERMUTATIONSGRUPPEN, AUFLÖSBARE GRUPPEN, SEMI-DIREKTE PRODUKTE

47. (a) Zeige: Sind $\rho, \sigma \in S_n$ disjunkte Permutationen, dann gilt $(\rho\sigma)^k = \sigma^k \rho^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige: Ist ρ ein k-Zykel in S_n, dann ist $\mathrm{ord}(\rho) = k$.

(c) Zeige: Ist $\pi \in S_n$ ein Produkt paarweise disjunkter Zyklen der Länge $k_1, \ldots, k_r$, so ist $\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$.

48. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei G eine Gruppe mit Ordnung $|G| = 2p$.
Zeige, dass G entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_{2p} ist.

Eine Gruppe G heisst **auflösbar**, falls eine Folge von Untergruppen $H_i \leqslant G$ existiert mit

$$\{e\} = H_n \leqslant \cdots \leqslant H_0 = G\,,$$

so dass für alle $0 \leqslant i \leqslant n-1$ gilt

- $H_{i+1} \trianglelefteq H_i$,
- H_i/H_{i+1} ist abelsch.

49. (a) Zeige, dass S_4 auflösbar ist. (*Hinweis*: $S_4 \cong C$)

(b) Zeige, dass A_5 nicht auflösbar ist. (*Hinweis*: $A_5 \cong D$)

50. Sei K_1 eine Gruppe, $N \trianglelefteq K_1$, $\bar{K}_1 := K_1/N$ und $\bar{K}_2 \trianglelefteq \bar{K}_1$.
Zeige, dass für $K_2 := \{a \in K_1 : aN \in \bar{K}_2\}$ gilt

$$N \trianglelefteq K_2 \trianglelefteq K_1 \qquad \text{und} \qquad \bar{K}_1/\bar{K}_2 \cong K_1/K_2\,.$$

51. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Gruppe G ist auflösbar.

(b) Es existiert eine Folge von Untergruppen $\{e\} = K_m \leqslant \cdots \leqslant K_0 = G$, so dass für alle $0 \leqslant i \leqslant m-1$ gilt $K_{i+1} \trianglelefteq K_i$, und K_i/K_{i+1} jeweils zyklisch mit primer Ordnung ist.
Hinweis: Verwende Aufgabe 50 sowie den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (bzw. Korollar 5.5).

(c) Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G^k = \{e\}$, wobei $G^{(0)} := G$ und $G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}]$.
Hinweis: Verwende Proposition 2.18.

52. Zeige, dass jede Gruppe G mit $|G| = p^m$ für $m \in \mathbb{N}$ und p prim auflösbar ist.
Hinweis: Mit Induktion über m und Faktum 3.4.