Serie 8

SEMI-DIREKTE PRODUKTE, RINGE

53. Seien zwei Gruppen N, H und zwei Homomorphismen $\varphi, \varphi' \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben. Es seien $N \rtimes_{\varphi} H$ und $N \rtimes_{\varphi'} H$ die semidirekten Produkte.

Zeige, dass diese beiden Gruppen in den folgenden Situationen isomorph sind:

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi'_h = \alpha \circ \varphi_h \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt

$$N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi = \varphi' \circ \beta$. Dann gilt

$$N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

54. Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 28.

Hinweis: Zeige mit dem Sylow-Theorem, dass eine Gruppe der Ordnung 28 immer einen nicht-trivialen Normalteiler hat.

55. Sei $(G, +)$ eine additive abelsche Gruppe und sei $\mathrm{End}(G)$ die Menge der Endomorphismen von G.

Zeige, dass $\big(\mathrm{End}(G), +, \circ\big)$ mit $(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g)$ und $(f_1 \circ f_2)(g) := f_1\big(f_2(g)\big)$ zu einem Ring wird.

56. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(S)$ (*d.h.* der Menge aller Teilmengen von S) definieren wir zwei binäre Operationen $\oplus$ und $*$ wie folgt:

$$X * Y := X \cap Y$$

und

$$X \oplus Y := (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)\,.$$

(a) Zeige, dass $\big(\mathscr{P}(S), \varnothing, S, \oplus, *\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Zeige, dass eine nicht-leere Menge $\mathfrak{a} \subseteq \mathscr{P}(S)$ genau dann ein Ideal ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für $X, Y \in \mathfrak{a}$ ist $X \cup Y \in \mathfrak{a}$,

(ii) ist $X \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathfrak{a}$.

57. Sei n eine positive natürliche Zahl. Definiere die **Eulersche φ-Funktion** durch

$$\varphi(n) := \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\right|.$$

(a) Zeige: Für jede ganze Zahl a, die teilerfremd ist zu n, gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \textit{d.h.}\ n \mid (a^{\varphi(n)} - 1).$$

(b) Zeige: Existiert eine Zerlegung $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$ mit paarweise teilerfremden positiven Zahlen q_i, so ist $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(q_i)$.

(c) Zeige: Ist $n = p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und $l_i > 0$ (für alle i), so gilt

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

58. Sei $R = \mathbb{Z}/201\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/102\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/96\mathbb{Z}$.

(a) Bestimme die Ordnung $|R^*|$ der Einheitengruppe von R.

(b) Finde das multiplikativ Inverse von $(\overline{13}, \overline{13}, \overline{13})$ in R.