(e) • Ist $g \in xH$, so ist $g = xh$ (für ein $h \in H$).
Also gilt $gH = (xh)H = xH$ und somit
ist $xH \subseteq \{g \in G : gH = xH\}$.

• Ist andererseits $xH = gH$ (für ein $g \in G$),
dann folgt aus (b), $g \in xH$ (weil $g \in gH$),
und somit gilt $\{g \in G : gH = xH\} \subseteq xH$.

$\dashv$

<u>Folgerung</u>: Aus (e) folgt $xH = yH \iff y \in xH$ (bzw. $x \in yH$).

<u>Bem.</u> Der Beweis der rechts-Version von Lemma 2.4 ist analog.

<u>Def.</u> Für eine Untergruppe $H \leq G$ sei

$$G/H := \{xH : x \in G\} \quad \text{und} \quad H\backslash G := \{Hx : x \in G\}.$$

Als Folgerung aus der links- und rechts-Version von Lemma 2.4(b) erhalten wir das folgende

<u>Faktum</u>: Ist $H \leq G$, dann gilt

$$\bigcup_{x \in G} xH = G = \bigcup_{x \in G} Hx \quad \text{bzw.} \quad \bigcup G/H = G = \bigcup H\backslash G.$$

Als Folgerung aus Lemma 2.4 (d) erhalten wir

<u>Lemma 2.5</u> (Links-Version) Sei $H \leq G$. Dann gilt für alle $x, y \in G$:
entweder $xH = yH$ oder $xH \cap yH = \emptyset$.

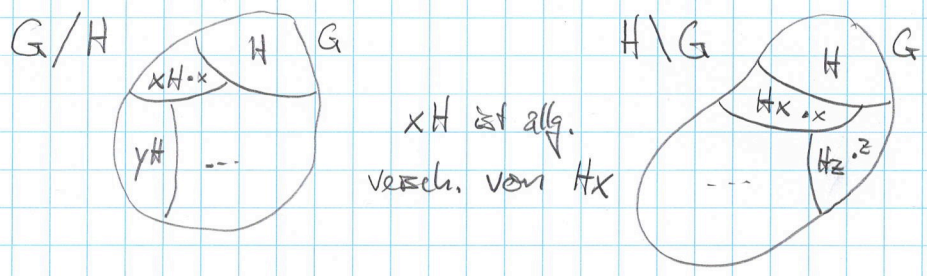
<u>Beweis</u>: Seien $x, y \in G$. Ist $xH \cap yH = \emptyset$, dann sind wir fertig.
Andernfalls ex. ein $z \in xH \cap yH$, d.h. $z = xh_1 = yh_2$
für $h_1, h_2 \in H$. Es gilt $x^{-1}z = x^{-1}(xh_1) = h_1 \in H$ und
$z^{-1}y = (yh_2)^{-1}y = (h_2^{-1}y^{-1})y = h_2^{-1} \in H$, und weil H eine
Gruppe ist, ist auch $(\underbrace{x^{-1}z}_{=h_1})(\underbrace{z^{-1}y}_{=h_2}) = x^{-1}y \in H$. Mit

Lemma 2.4 (d) ist also $xH = yH$, und somit bilden die Nebenklassen von H eine Partition von G. $\dashv$

<u>Bem.</u> Der Beweis der rechts-Version von Lemma 2.5 ist analog.

Aus Lemma 2.4 (a) folgt, dass jeder Teil der Partition von G dieselbe Kardinalität wie H hat; das führt zu folgender Definition.

<u>Def.</u> Ist $H \leq G$, dann ist $|G/H| = |H\backslash G|$ der <u>Index</u> von H in G, bezeichnet mit $[G:H]$.



<u>Bsp:</u> Sei C die Würfelgruppe (C für Cube) und T die Tetraedergruppe (T für Tetraeder); beide Gruppen orientierungserhaltend, also ohne Spiegelungen.

- $|C| = 24$, $|T| = 12$, $T \leq C$, $[C:T] = 2$.
  genau genommen: C enthält eine Untergruppe die isomorph ist zu T.
- $C_4 \leq D_4 \leq C$
- $[C:D_4] = 3$, $[D_4:C_4] = 2$
  $[C:C_4] = 6 = 2 \cdot 3$
- Sei σ eine Rotation um eine Raumdiagonale des Würfels. Dann ist $\sigma^3 = 1$ (Identität) und es gilt:
  $$C = D_4 \,\dot\cup\, \sigma D_4 \,\dot\cup\, \sigma^2 D_4 \quad (\dot\cup \text{ disj. Vereinigung})$$

<u>Korollar 2.6</u> Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Ist $[G:H] = 2$, dann gilt für alle $x \in G$: $xH = Hx$ bzw. $xHx^{-1} = H$.

<u>Beweis:</u> Ist $x \in H$, dann ist $xH = H = Hx$ (weil H eine Gruppe ist).
Ist $x \in G$, $x \notin H$, dann ist $G = H \dot\cup xH$, aber auch $G = H \dot\cup Hx$, also ist $xH = Hx$ bzw. $xHx^{-1} = H$. ⊣

<u>Bem.</u> Für $K \leq H \leq G$ haben wir $K \leq G$ und es gilt:

$$[G:K] = [G:H] \cdot [H:K]$$

<u>Theorem 2.7</u> (Lagrange) Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$.
Dann gilt:

$$|G| = [G:H] \cdot |H|$$

Ist G eine endliche Gruppe, so gilt $|H| \mid |G|$

<u>Beweis:</u> Betrachte die Partition G/H der Menge G. Diese Partition hat $[G:H]$ Teile und jeder Teil hat die Kardinalität $|H|$ (Lem. 2.4 (a)); also gilt $|G| = [G:H] \cdot |H|$.
Für endl. Gruppen muss $|H|$ ein Teiler von $|G|$ sein. ⊣

<u>Bsp:</u> Untergruppen von C der Kardinalität $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.

<u>Korollar 2.8</u> (a) Ist G eine endl. Gruppe der Ordnung p mit p prim, dann ist $G \cong C_p$. Insbesondere ist dann G abelsch.

(b) Ist G endl. und $x \in G$, dann gilt $\mathrm{ord}(x) \mid \mathrm{ord}(G)$. Insbesondere ist $x^{\mathrm{ord}(G)} = e_G$.

[Beweis in den Übungen]

Nächstes Ziel ist mit Nebenklassen zu rechnen:

Wir hätten gerne $(xH) \cdot (yH) = xyH$,

weil $xyH = xyHH = xyHy^{-1}yH = x\underbrace{(yHy^{-1})}_{=H\,?}yH$

brauchen wir $yHy^{-1} = H$ ...

Faktum 2.9 Sei G eine Gruppe, $H \leq G$, $x \in G$. Dann ist

$$xHx^{-1} := \{xhx^{-1} : h \in H\}$$

eine Untergruppe von G.

Beweis: Seien $\underbrace{xh_1x^{-1}}_{=a}$ und $\underbrace{xh_2x^{-1}}_{=b}$ in xHx^{-1}. Dann ist auch

$$\underbrace{(xh_1x^{-1})}_{=a}\underbrace{(xh_2^{-1}x^{-1})}_{=b^{-1}} = x\underbrace{h_1h_2^{-1}}_{\in H}x^{-1} \in xHx^{-1},$$

also ist $xHx^{-1} \leq G$. ⊣

Def.
- Ist $H \leq G$ und $x \in G$, so heissen H und xHx^{-1} <u>konjugierte Untergruppen</u>.
- Ist $N \leq G$ und gilt für alle $x \in G$, $xNx^{-1} = N$ (bzw. $xN = Nx$), so ist N ein <u>Normalteiler</u> von G; man sagt auch N ist eine <u>normale Untergruppe</u> von G.

Bem. $\{e\}$ und G sind Normalteiler von G; die trivialen Normalteiler.

Notation: Ist $N \leq G$ ($N < G$) ein Normalteiler von G, dann schreiben wir $N \trianglelefteq G$ ($N \triangleleft G$).

Bsp.
- Ist $H \leq G$ mit $[G:H] = 2$, dann ist $H \triangleleft G$. (Kor. 2.6)
- Ist $H \leq G$ und G abelsch, so ist $H \trianglelefteq G$.

Beispiele mit Würfelgruppe C:
- $T \trianglelefteq C$ (Index $= 2$)
- $H \cong C_2 \times C_2$; $H \ntrianglelefteq C$
  (3 Kopien)
- $H \cong C_2 \times C_2$; $H \trianglelefteq C$
  (1 Kopie) 3 Achsen durch Flächenmittelpunkte