3. Operationen von Gruppen auf Mengen

In diesem Kapitel betrachten wir Operationen von Gruppen G auf Mengen M (auch Gruppenwirkungen genannt), wobei die Menge M auch die Menge der Elemente von G (oder einer anderen Gruppe) sein kann.

<u>Def.</u> Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Dann ist die Abbildung

$$G \times M \to M$$
$$(a, x) \mapsto a \circ x$$

eine <u>Operation von G auf M</u> (kurz "Operation") falls gilt:

(i) $\forall x \in M \; (e_G \circ x = x)$

(ii) $\forall a, b \in G \; \forall x \in M \; (\underbrace{(ab)}_{\in G} \circ x = a \circ (\underbrace{b \circ x}_{\in M}))$

<u>Notation:</u> Wir schreiben $G \curvearrowright M$

Transformationsgruppe

G-Menge

Um Operationen von Gruppen auf Gruppen zu untersuchen, brauchen wir den Begriff "Homomorphismus":

<u>Def.</u> Seien $(G, \circ)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und sei $\varphi: G \to H$ eine Abbildung der Menge G in die Menge H. Dann ist φ ein <u>Homomorphismus</u> falls für alle $x, y \in G$ gilt:

homos ≙ ähnlich gleich

morph ≙ Gestalt (z.B. amorph)

$$\varphi(\underbrace{x \circ y}_{\in G}) = \underbrace{\varphi(x)}_{\in H} \cdot \underbrace{\varphi(y)}_{\in H}$$

<u>Def.</u> Analog zu S_n für die Gruppe der Bijektionen $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ definieren wir die <u>Symmetriegruppe der Menge M</u> $S(M)$ als die Gruppe der Bijektionen $M \to M$.

Theorem 3.1 (a) $G \times M \to M$ eine Operation
$(a, x) \mapsto a \circ x$

so ist

$$\varphi : G \to S(M)$$
$$a \mapsto \varphi_a \quad \text{mit} \quad \varphi_a(x) := a \circ x$$

ein Homomorphismus.

(b) Ist $G \to S(M)$ ein Homomorphismus
$a \mapsto \varphi_a$

so ist

$$G \times M \to M$$
$$(a, x) \mapsto a \circ x := \varphi_a(x)$$

eine Operation.

Beweis: (a) $\varphi_a \in S(M)$: φ_a ist bijektiv, denn es ex. eine Umkehrabbildung $\varphi_{a^{-1}}$ für die gilt:

$$\forall x \in M \big(\underbrace{(\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a)(x)}_{a^{-1} \circ (a \circ x) \underset{G \curvearrowright M}{=} (a^{-1} a)(x) = x} = x \big)$$

φ Homom.: $\varphi(ab)(x) = \varphi_{ab}(x) \underset{\text{Def.}}{=} (ab) \circ x$
$\underset{G \curvearrowright M}{=} a \circ (b \circ x) \underset{\text{Def.}}{=} \varphi_a(\varphi_b(x))$
$= (\varphi_a \circ \varphi_b)(x)$.

(b) $G \curvearrowright M$: (i) $e \circ x \underset{\text{Def.}}{=} \varphi_e(x) \underset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \iota(x) = x$

(ii) $(ab) \circ x \underset{\text{Def.}}{=} \varphi_{ab}(x) \underset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \varphi_a(\varphi_b(x)) \underset{\text{Def.}}{=} a \circ (b \circ x)$

Bem. Jeder Operation $G \curvearrowright M$ entspricht ein Homom. $G \to S(M)$ und umgekehrt.

Bsp. 1) $G \curvearrowright G$
(a) $(a, x) \mapsto ax$ Linkstranslation
(b) $(a, x) \mapsto xa^{-1}$ Rechtstranslation
(c) $(a, x) \to axa^{-1}$ Konjugation

2) M Menge der UG von G

$$G \times M \longrightarrow M$$
$$(a, H) \longmapsto aHa^{-1}$$

Def. Sei $G \curvearrowright M$ eine Operation und $x \in M$.

(i) $Gx := \{a \circ x : a \in G\} \subseteq M$ heisst "Bahn von G durch x" oder "Orbit von x".

(ii) $St_G(x) := \{a \in G : a \circ x = x\}$ heisst "Stabilisatorgruppe von x in G".

(iii) $M/G := \{Gx : x \in M\}$ ist die "Menge der G-Bahnen in M".

Theorem 3.2 (a) $\forall x \in M \, (St_G(x) \leq G)$

(b) $M = \dot{\bigcup}_{N \in M/G} N$ (disj. Vereinigung)

(c) $\forall x \in M \, \forall a \in G \, (St_G(a \circ x) = a St_G(x) a^{-1})$

(d) $\forall x \in M \, ([G : St_G(x)] = |Gx|)$

Beweis: (a) Seien $a, b \in St_G(x)$, d.h. $a \circ x = x = b \circ x$.

Dann ist $(ab^{-1}) \circ x = (ab^{-1}) \circ (\underbrace{b \circ x}_{= x \text{ weil } b \in St_G(x)}) = a \circ ((bb^{-1}) \circ x)$

$= a \circ (e \circ x) = a \circ x = x$, weil $a \in St_G(x)$

also ist mit $a, b \in St_G(x)$ auch $ab^{-1} \in St_G(x)$.

(b) Seien $Gx, Gx' \in M/G$ und $y \in Gx \cap Gx'$.

Dann ex. $a, a' \in G$ mit $a \circ x = y = a' \circ x'$ und

somit ist $x = (a^{-1} a') \circ x' \in Gx'$ und $x' = (a'^{-1} a) \circ x \in Gx$,

d.h. $Gx = Gx'$.

(c) Ist $b \in St_G(x)$, dann ist $(ab\overbrace{\overbrace{a^{-1})}^{=e} \circ (a \circ x}^{=x}) = (ab) \circ x$

$= a \circ (\underbrace{b \circ x}_{= x \text{ weil } b \in St_G(x)}) = a \circ x$,

also ist $(aba^{-1}) \in St_G(a \circ x)$, bzw. weil $b \in St_G(x)$ beliebig war, $a St_G(x) a^{-1} \leq St_G(a \circ x)$.

Ist andererseits $c \in St_G(a \circ x)$, so ist

$$c \circ (a \circ x) = a \circ x$$

$$\Leftrightarrow (a^{-1}c) \circ (a \circ x) = (a^{-1}a) \circ x = x$$

$$\text{d.h. } (a^{-1}ca) \circ x = x$$

und somit ist $a^{-1}ca \in St_G(x)$, bzw. $c \in a St_G(x) a^{-1}$,

und weil $c \in St_G(a \circ x)$ beliebig war folgt $St_G(a \circ x) \leq a St_G(x) a^{-1}$.

(d) Sei $x \in M$ und $a \circ x, b \circ x \in Gx$.

Dann gilt $a \circ x = b \circ x \Leftrightarrow (b^{-1}a) \circ x = x \Leftrightarrow b^{-1}a \in St_G(x)$

$$\Leftrightarrow a \in b St_G(x) \underset{\text{Lem. 2.4 (e)}}{\Leftrightarrow} a St_G(x) = b St_G(x)$$

D.h. wir haben gleich viele Elemente in Gx wie wir Nebenklassen von $St_G(x)$ haben und somit gilt $[G : St_G(x)] = |Gx|$.

$\dashv$

<u>Def.</u> Sei $G \curvearrowright M$ eine Operation. Ist $|Gx| = 1$, d.h. $G = St_G(x)$, so heisst x <u>Fixpunkt</u>.

<u>Bsp.</u> (1) Sei $M = G$ und $G \curvearrowright G$ definiert durch

$$G \times G \to G$$
$$(a, x) \mapsto axa^{-1}$$

Für $x \in G$ sei $[x] := \{axa^{-1} : a \in G\}$ die <u>Konjugationsklasse</u> von x (in G), bzw. der Orbit von x.

Es gilt mit Thm. 3.2: $|[x]| = [G : St_G(x)]$ wobei $St_G(x) = Z_G(x)$.

[beachte: $axa^{-1} = x \Leftrightarrow ax = xa$]

Weiter gilt: $|[x]| = 1 \Leftrightarrow x \in Z(G)$.

[beachte: Ist $St_G(x) = Z_G(x) = G$, so gilt für alle $a \in G$:

$axa^{-1} = x$, d.h. $\forall a \in G\,(ax = xa)$, also $x \in Z(G)$.]