(2) Sei $M = UGr(G)$, d.h. M ist die Menge aller Untergruppen von G. $G \curvearrowright UGr(G)$ sei definiert durch

$$G \times UGr(G) \longrightarrow UGr(G)$$
$$(a, H) \longmapsto aHa^{-1}$$

Für $H \leq G$ sei $[H] := \{aHa^{-1} : a \in G\}$ die Konjugationsklasse von H in G, bzw. der Orbit von H.

Es gilt:
- $H \leq G$ ist Fixpunkt gdw. $H \trianglelefteq G$.
- $St_G(H) = \{a \in G : aHa^{-1} = H\}$ ist der Normalisator von H in G, bezeichnet mit $N(G)$.
- $G = N(H) \iff H \trianglelefteq G$
- $|[H]| = [G : N(H)]$
- $H \trianglelefteq N(G)$

Lemma 3.3 Sei G eine Gruppe und seien $A, B \leq G$.
Dann gilt $[A, B] \leq A$ genau dann wenn $B \leq N(G)$.

Beweis: Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt:

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in A \iff ba^{-1}b^{-1} \in a^{-1}A = A \iff b \in N(G).$$

Weil a und b beliebig waren gilt $B \leq N(G)$. ⊣

Sei $G \curvearrowright G$ durch Konjugation definiert, d.h. $G \times G \longrightarrow G$

$$(a, x) \longmapsto axa^{-1}$$

Faktum 3.4 Seien $[x_1], \ldots, [x_n]$ die n verschiedenen Konjugationsklassen mit mehr als einem Element.
Dann ist

$$|G| = \underbrace{|Z(G)|}_{\text{Vereinigung der 1-elem. Konj.-Klassen}} + \sum_{i=1}^{n} |[x_i]| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : Z_G(x_i)].$$

Beweis: Es gilt $a \in Z(G) \Leftrightarrow |[a]| = 1$. Zudem zerfällt G in paarweise disjunkte Konjugationsklassen. ⊣

Proposition 3.5 Ist G eine Gruppe mit $|G| = p^2$ und p prim, so ist G abelsch.

Beweis: Wir nehmen an, dass G nicht abelsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

- Ist G nicht abelsch, so ist $Z(G) \neq G$, d.h. $Z(G) < G$ und es gilt: $|Z(G)| \in \{1, p\}$.
- Mit Faktum 3.4 ex. $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $|[x_i]| > 1$ und $p^2 = |G| = \underbrace{|Z(G)|}_{1 \text{ oder } p} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[G : Z_G(x_i)]}_{< p^2}$.

  Weil $1 < [G : Z_G(x_i)] < p^2$ muss gelten $|Z_G(x_i)| = p$.
  ($1 < |[x_i]|$)
- Somit ist $p^2 = |Z(G)| + n \cdot p$ und damit $|Z(G)| = p = |Z_G(x_i)|$
- Mit $Z(G) \leq Z_G(x_i)$ folgt $Z(G) = Z_G(x_i)$
- Sei $x_0 \in G \setminus Z(G)$. Dann ist $x_0 \in [x_i]$ (für ein i), $|Z_G(x_0)| = |Z_G(x_i)| = p$, und mit $Z(G) \leq Z_G(x_0)$ folgt $Z(G) = Z_G(x_0)$. Das ist aber ein Widerspruch, denn $x_0 \in Z_G(x_0) \setminus Z(G)$.

⊣

Bem. Mit dem Hauptsatz über endl. erzeugte abelsche Gruppen werden wir später sehen, dass es (bis auf Isom.) nur jeweils zwei Gruppen der Ordnung p^2 gibt, nämlich C_{p^2} und $C_p \times C_p$

Def. Sei G eine Gruppe, M eine Menge und $G \curvearrowright M$ eine Operation. Dann sei, für $a \in G$:

$$^aM := \{x \in M : a \circ x = x\}$$

also diejenigen Elemente von M, die durch a festgehalten werden.

Als weitere Anwendung von Gruppenoperationen beweisen wir die folgende

Proposition 3.6 (nicht-Burnside) Ist $G \curvearrowright M$ eine Operation, dann gilt:

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{a \in G} |^aM|$$

Beweis:

- Es gilt $\sum_{a \in G} |^aM| = \sum_{a \in G} |\{x \in M : a \circ x = x\}|$

$$= \sum_{x \in M} |\{a \in G : a \circ x = x\}| = \sum_{x \in M} |St_G(x)|.$$

- Weiter gilt: Ist $Y \in M/G$ und $y_0 \in Y$ beliebig, so ist $|Y| = |Gy_0| = |[G : St_G(y_0)]| = \frac{|G|}{|St_G(y_0)|}$

- $\sum_{x \in M} |St_G(x)| = \sum_{Y \in M/G} \sum_{y \in Y} |St_G(y)| = \sum_{Y \in M/G} |Y| \cdot |St_G(y_0)|$ für ein $y_0 \in Y$

$$= \sum_{Y \in M/G} \frac{|G|}{|St_G(y_0)|} \cdot |St_G(y_0)| = \sum_{Y \in M/G} |G| = |M/G| \cdot |G|$$

- Somit ist $\sum_{a \in G} |^aM| = \sum_{x \in M} |St_G(x)| = |M/G| \cdot |G|$

bzw. $$|M/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{a \in G} |^aM|$$

⊣

Beispiel: Wieviele wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Würfel (d.h. die Würfelflächen) mit 3 verschiedenen Farben zu färben?
(wobei mit "wesentlich verschieden" gemeint ist, dass die Färbungen nicht durch Rotation des Würfels ineinander übergeführt werden können)

- Die Menge M ist die Menge aller möglichen Färbungen, also $|M| = 3^6$.
- Die Gruppe G ist die Würfelgruppe, also $|G| = 24$.
- $G \curvearrowright$ ist eine Operation und wir müssen $|M/G|$ bestimmen. Dafür bestimmen wir $|{}^aM|$ für jedes $a \in G$.

#1 • $a = 2$: $|{}^aM| = 3^6$

• "Rotation um $\pm\frac{\pi}{2}$ um eine Achse durch Flächen-
#6 mittelpunkte"; es gibt 3 solche Rotationen.
$|{}^aM| = 3^3$

• "Rotationen um π um Achsen durch Flächenmittel-
#3 punkte"; $|{}^aM| = 3^4$

• "Rotationen um $\pm\frac{2\pi}{3}$ um Achsen durch Würfeldiag."
#8 $|{}^aM| = 3^2$

• "Rotationen um π um Achsen durch Kanten-
#6 mittelpunkte"; $|{}^aM| = 3^3$

#24

$$|M/G| = \frac{1}{24} \cdot (3^6 + 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3)$$

$$= 57$$