<u>Beweis:</u> (a) das ist Thm. 2.14

(b) Weil $KN \leq G$ und $N \subseteq KN$ ist $N \leq KN$,
und weil $N \trianglelefteq G$ ist $N \trianglelefteq KN$.

(c) Ist $x \in K$ und $a \in (N \cap K)$, dann ist

$$\left.\begin{array}{l} xax^{-1} \in K \text{ (weil } a, x \in K) \\ xax^{-1} \in N \text{ (weil } N \trianglelefteq G \text{ und } a \in N) \end{array}\right\} \Rightarrow xax^{-1} \in (N \cap K)$$

und somit ist $(N \cap K) \trianglelefteq K$.

(d) Definiere $\varphi : K \to KN/N$ durch $\varphi(x) := xN$.
Dann ist φ ein surjektiver Homom. mit
$\ker(\varphi) = \{k \in K : k \in N\} = N \cap K$.
Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"'] & KN/N \\ K/(N \cap K) \arrow[ur, "\sim", "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

weil φ surj. ist, ist φ mit dem 1. Isom.-Satz ein Isomorphismus.

$\varphi(\pi(x)) = \varphi(x(N \cap K)) = \varphi(x)$

$\dashv$

<u>Theorem 4.8</u> (Dritter Isomorphiesatz)

Seien $K, N \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq K$. Dann ist $K/N \trianglelefteq G/N$ und die Abbildung

$$\varphi : G/K \longrightarrow \frac{G/N}{K/N}$$
$$xK \longmapsto (xN)(K/N)$$

ist ein Isomorphismus.

[Beweis Aufgabe 35]

<u>Bsp.</u> $G \cong C$, $K \cong T$, $N \cong C_2 \times C_2$ mit $N \trianglelefteq T, C$; $\underbrace{C/T}_{\cong C_2} \cong \overbrace{\frac{C/C_2 \times C_2}{T/C_2 \times C_2}}^{D_3}$ $\cong C_3$

5. Endlich erzeugte abelsche Gruppen

<u>Erinnerung</u>: • Eine Gruppe G heisst endlich erzeugt wenn es eine endliche Teilmenge $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq G$ gibt mit $G = \langle S \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

• Ist $G = \langle x \rangle$ für ein $x \in G$, so nennen wir G <u>zyklisch</u> (für $\mathrm{ord}(x)$ endlich) bzw. <u>∞-zyklisch</u> (für $\mathrm{ord}(x)$ unendlich).

<u>Bem.</u> • Ist G zyklisch und $|G| = n$, so ist $G \cong C_n$.

• Ist G ∞-zyklisch, so ist $G \cong (\mathbb{Z}, +)$.

• Endliche Gruppen sind immer endlich erzeugt, denn $G = \langle G \rangle$.

<u>Faktum 5.1</u> Ist G endl. erzeugt, so existiert eine kleinste positive Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit $G = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ für $x_i \in G$, und für alle $S \subseteq G$ mit $|S| < r$ gilt $\langle S \rangle \neq G$.

<u>Beweis:</u> Folgt aus der Tatsache, dass jede nicht-leere Teilmenge nat. Zahlen ein kl. Element besitzt. $\dashv$

<u>Def.</u> Ist $G = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ mit r minimal, so heissen $x_1, \dots, x_r$ <u>Generatoren</u> von G. [Manchmal wird die Minimalität weggelassen; analog: Erzeugendensystem vs. Basis]
[eigentlich <u>Basis</u>]

<u>Faktum 5.2</u> Sind $x_1, \dots, x_r$ Generatoren einer abelschen Gruppe G, so lässt sich jedes $x \in G$ schreiben als

$$x = \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} \quad \text{mit } n_i \in \mathbb{Z} \text{ für } 1 \leq i \leq r.$$

<u>Beweis:</u> Folgt direkt aus der Definition von "endl. erzeugt". $\dashv$

<u>Folgerung:</u> Ist G eine endl. erzeugte abelsche Gruppe und sind $x_1, \dots, x_r$ Generatoren von G, so ist

$$G = \left\{ \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} : (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r \right\}.$$

<u>Lemma 5.3</u> Sei H eine endl. erzeugte abelsche Gruppe und $x_1, \dots, x_s$ Generatoren von H (für $s \geq 1$). Seien weiter $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$, nicht alle 0, mit $\underbrace{(m_1, \dots, m_s)}_{:= ggT(m_1, \dots, m_s)} = 1$.

Dann ex. Generatoren $y_1, \dots, y_s$ von H mit

$$y_1 = x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_s^{m_s}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $m := \sum_{i=1}^{s} m_i$, dann ist $m > 0$ (nach Voraussetzung). Der Beweis ist nun mit Induktion nach m.

- Ist $m = 1$, so ist $m_{i_0} = 1$ für genau ein i_0 (für alle anderen i's ist $m_i = 0$). Nach umnummerieren dürfen wir annehmen $i_0 = 1$. Setzen wir $y_i = x_i$ (für $1 \leq i \leq r$) so sind wir fertig.

- Sei nun $m > 1$ und sei der Satz bewiesen für alle m' mit $1 \leq m' < m$.
  Weil $(m_1, \dots, m_s) = 1$ ist $m_i \neq 0$ für mindestens zwei i. Nach umnummerieren dürfen wir annehmen $m_1 \geq m_2 > 0$. Dann sind $m_1 - m_2, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ nicht alle 0 und $(m_1 - m_2, m_2, \dots, m_s) = 1$ (beachte dass gilt $(k \mid m_2 \wedge k \mid m_1 - m_2) \rightarrow k \mid m_1$).
  Weiter sind $x_1, x_1 \cdot x_2, x_3, \dots, x_s$ Generatoren von H, denn es gilt: $x_2 = x_1^{-1}(x_1 \cdot x_2)$, also $x_2 \in \langle x_1, x_1 x_2, \dots \rangle$.

Nun ist $m_1 - m_2 + \sum_{i=2}^{s} m_i = m - m_2 < m$ (weil $m_2 > 0$)
und mit der Induktionsvoraussetzung ex. Generatoren
$y_1, \dots, y_s$ von H mit

$$y_1 = x_1^{m_1 - m_2} \cdot (x_1 \cdot x_2)^{m_2} \cdot x_3^{m_3} \cdot \dots \cdot x_s^{m_s}$$

$$\underset{H \text{ abelsch}}{=} x_1^{m_1} \cdot \underbrace{x_1^{-m_2} \cdot x_1^{m_2}}_{= e_H} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots x_s^{m_s} = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_s^{m_s}$$

was zu zeigen war.

$\dashv$

<u>Theorem 5.4</u> (Hauptsatz über endl. erzeugte abelsche Gruppen)
Sei G eine endl. erzeugte abelsche Gruppe. Dann ex. Generatoren $x_1, \dots, x_r$ von G, so dass gilt:

$$G \cong \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \dots \times \langle x_r \rangle$$

<u>Bem.</u> $G \cong$ "Produkt von zykl. Gruppen C_n und von ∞-zykl. Gruppen $\mathbb{Z}$"

<u>Beweis:</u> • Ist $r = 1$, so ist $G = \langle x_1 \rangle$ und wir sind fertig.
• Für $r > 1$ betrachten wir die Menge $\mathcal{R}$ aller r-Tupel $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r) \in G^r$ für die gilt $\langle \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r \rangle = G$ und $\operatorname{ord}(\tilde{x}_1) \leq \operatorname{ord}(\tilde{x}_2) \leq \dots \leq \operatorname{ord}(\tilde{x}_r)$ wobei $n < \infty = \infty$ (für $n \in \mathbb{N}$). Es ist $\mathcal{R} \neq \emptyset$ (unmum.).

Sei $N_1 := \min\{\operatorname{ord}(x_1) : x_1 \in G \wedge \exists (\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_r) \in G^{r-1} ((x_1, \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_r) \in \mathcal{R})\}$

$N_2 := \min\{\operatorname{ord}(x_2) : x_2 \in G \wedge \exists x_1 \in G (\operatorname{ord}(x_1) = N_1) \wedge \exists (\tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_r) \in G^{r-2} ((x_1, x_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_r) \in \mathcal{R})\}$

$N_3 := \min\{\operatorname{ord}(x_3) : x_3 \in G \wedge \exists x_1, x_2 \in G (\operatorname{ord}(x_1) = N_1 \wedge \dots$

Dann ist $0 < N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_r$ und für alle $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r) \in \mathcal{R}$ gilt: Ist $j \leq r$, $0 < j$ und für alle $0 < i < j$ gilt $\operatorname{ord}(\tilde{x}_i) = N_i$, dann ist $\operatorname{ord}(\tilde{x}_j) \geq N_j$.
[folgt aus der Def. der N_i's]