8. Semidirekte Produkte

<u>Erinnerung:</u> Ist G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $|H \cap N| = 1$ und $|N| \cdot |H| = |G|$, dann ist $NH = G = HN$, denn mit Prop. 2.13 gilt $|HN| = \frac{|H| \cdot |N|}{|H \cap N|}$ und mit Thm. 2.14 haben wir $NH = G = HN$.

Im Allg. ist aber $ax \neq xa$ für $a \in N$, $x \in H$. Es gilt jedoch (mit obiger Voraussetzung) das folgende

<u>Faktum 8.1</u> Sind $a, b \in N$, $x, y \in H$, dann ist
$$(ax)(by) = cz \quad \text{für} \quad c = a(xbx^{-1}) \in N$$
und $z = xy \in H$, wobei c und z eindeutig sind.

<u>Beweis:</u>
- Eindeutigkeit folgt aus $NH = G$ und $|N| \cdot |H| = |G|$.
- $(ax)(by) = a(xb)(x^{-1}xy) = \underbrace{a(\underbrace{xbx^{-1}}_{\in N})}_{\in N} \underbrace{xy}_{\in H}$,

  d.h. $(ax)(by) = cz$ mit $c \in N$, $z \in H$. $\dashv$

[Wenn wir G als cartesisches Produkt $N \times H$ schreiben mit Verknüpfung $\circ$ so gilt: $(a,x) \circ (b,y) = (a(xbx^{-1}), xy)$]

<u>Proposition 8.2</u> Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, dann ist
$$\begin{aligned} \kappa : H &\longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \\ x &\longmapsto \kappa_x : N \longrightarrow N \\ & \qquad\quad a \longmapsto xax^{-1} \end{aligned}$$
ein Homomorphismus.

<u>Beweis:</u>
- wohldefiniert: Für jedes $x \in H$ ist $\kappa_x \in \mathrm{Aut}(N)$
  - κ_x ist in $\mathrm{Aut}(N)$ weil N ein Normalteiler ist.
  - $\kappa_x(ab) = xabx^{-1} = (xax^{-1})(xbx^{-1}) = \kappa_x(a)\kappa_x(b)$

- κ ist ein Homomorphismus:

$$\kappa(xy) = \kappa_{xy} : N \longrightarrow N$$
$$a \longmapsto (xy)a(xy)^{-1}$$

es gilt $(xy)a(xy)^{-1} = x(yay^{-1})x^{-1} = \kappa_x(\kappa_y(a))$ (für alle $a \in N$), d.h. $\kappa_{xy} = \kappa_x \circ \kappa_y$ und somit ist $\kappa(xy) = \kappa(x) \circ \kappa(y)$, also κ ein Homom. $\dashv$

<u>Proposition 8.3</u> Ist G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $|H \cap N| = 1$ und $|NH| = |G|$, dann ist

$$G \cong (N \times H, *)$$

mit $(a,x) * (b,y) = (a\kappa_x(b), xy)$

wobei $\kappa : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$
$$x \longmapsto \kappa_x : N \longrightarrow N$$
$$b \longmapsto xbx^{-1}$$

<u>Beweis:</u>
- Jedes Element aus G lässt sich eindeutig schreiben als ax mit $a \in N$, $x \in H$.
- Schreiben wir $(a,x) \in N \times H$ für $ax \in G$, so erhalten wir mit Faktum 8.1:

$$(ax)(by) = a(xbx^{-1})xy \in G, \text{ also}$$
$$(a,x)(b,y) = (a(xbx^{-1}), xy)$$
$$= (a\kappa_x(b), xy) = (a,x) * (b,y) \in N \times H.$$

D.h. die Verknüpfung $(ax)(by)$ von Elementen aus G entspricht der Verknüpfung $(a,x) * (b,y)$ von Elementen aus $N \times H$.

- Das Neutralelement in $(N \times H, *)$ ist (e_G, e_G).
- Ist $(ax)(by) = a(xbx^{-1})xy = e$, so ist $y = x^{-1}$ und $b = \underbrace{x^{-1}a^{-1}x}_{\kappa_{x^{-1}}(a^{-1})}$, d.h. das Inverse von (a,x) ist $(x^{-1}a^{-1}x, x^{-1})$.

Beachte: $a\kappa_x(\kappa_{x^{-1}}(a^{-1})) = aa^{-1} = e$ $\dashv$