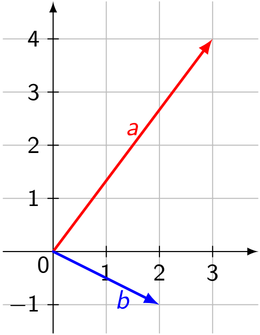
Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 7

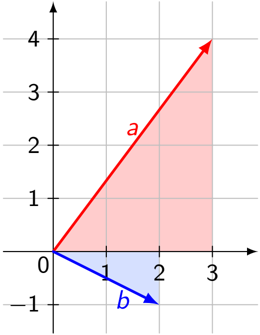
7.1(a) Betrachten Sie die Vektoren $a = \binom{3}{4}$ und $b = \binom{2}{-1}$ im VR $\mathbb{R}^2$ (siehe unten). Berechnen Sie die Länge der Vektoren a und b mithilfe des Satzes von Pythagoras.



Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 7

7.1(a) Betrachten Sie die Vektoren $a = \binom{3}{4}$ und $b = \binom{2}{-1}$ im VR $\mathbb{R}^2$ (siehe unten). Berechnen Sie die Länge der Vektoren a und b mithilfe des Satzes von Pythagoras.



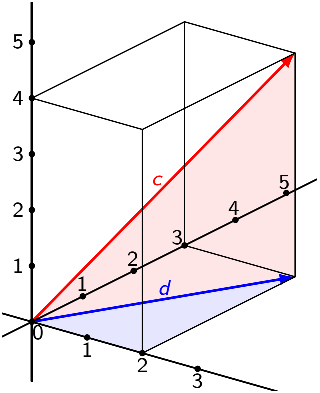
$$\|a\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\|b\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

7.1(b) Betrachten Sie nun die analoge Berechnung der Länge des Vektors $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Mithilfe des Satzes des Pythagoras im blauen rechtwinkligen Dreieck können wir die Länge des Hilfsvektors d berechnen. Wir erhalten

$$\|d\|^2 = 2^2 + 3^2.$$



Nun berechnen wir die Länge von c unter Verwendung des roten rechtwinkligen Dreiecks mit dem Satz des Pythagoras:

$$\|c\| = \sqrt{\|d\|^2 + 4^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

Betrachten Sie nun das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Berechnen Sie für den gegebenen Vektor c den Ausdruck $\langle c, c \rangle$.
Was stellen Sie fest?

$$\langle c, c \rangle = 2^2 + 3^2 + 4^2 = \|c\|^2$$

Das heisst, das Skalarprodukt des Vektors c mit sich selber ist das Quadrat seiner Länge.

7.2 Betrachten Sie nun den Vektorraum $\mathbb{R}^5$. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathbb{R}^5$, können wir im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ ein Skalarprodukt definieren, analog zum Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{i=1}^{5} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_5 b_5.$$

Auch im $\mathbb{R}^5$ ist die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^5$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Betrachten Sie die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors c. Betrachten Sie zusäzlich die Vektoren $f = 4c$ und $g = -5c$. Basierend auf der Länge des Vektors c, was würden Sie für die Längen der Vektoren f und g erwarten?

$$\|c\| = \sqrt{\langle c, c\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} c_i^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{39}$$

$f = 4c$ entsteht aus c durch Streckung mit dem Faktor 4. Also sollte die Länge von f 4 mal die Länge von c sein:

$$\|f\| = 4\|c\| = 4\sqrt{39}$$

Ebenso: $g = -5c$ sollte 5 mal so lang sein wie c, also

$$\|g\| = \|-5c\| = 5\|c\| = 5\sqrt{39}$$

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren f und g berechnen.

$$\|f\| = \|4c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(4c_i)^2} = $$

$$= \sqrt{4^2 \sum_{i=1}^{5} c_i^2} = 4\sqrt{\sum_{i=1}^{5} c_i^2} = 4\|c\| = 4\sqrt{39}$$

Ebenso:

$$\|g\| = \|-5c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(-5c_i)^2} = $$

$$= \sqrt{(-5)^2 \sum_{i=1}^{5} c_i^2} = 5\sqrt{\sum_{i=1}^{5} c_i^2} = 5\|c\| = 5\sqrt{39}$$

Wir erkennen allgemein $\|\lambda c\| = |\lambda|\|c\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren d und e.

$$\|d\| = 2\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{5}.$$

$$\|e\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\\6\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+(-1)^2+(-4)^2+6^2+0^2} = \sqrt{53}.$$

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor.

Der Nullvektor hat offensichtlich die Länge 0. Und er ist der einzige Vektor mit der Länge 0, denn die Summe von Quadraten unter der Wurzel

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}$$

ist nur 0, wenn alle x_i gleich 0 sind.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathbb{R}^5$?

Nein, denn die Wurzel

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}$$

ist immer ≥ 0.

7.3 Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathcal{P}_2$, können wir auch im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ die Länge eines Vektors definieren.
Die Länge eines Vektors p im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \ : \ \mathcal{P}_2 &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|p\| := \sqrt{\int_0^1 p^2(x)dx}. \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome

$$u(x) = -3x^2 + 2x - 4, v(x) = 2x^2 + 6, w(x) = -x^2 + 3x - 8.$$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors u. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $s = 3u$ und $t = -4u$. Basierend auf der Länge des Vektors u, was würden Sie für die Längen der Vektoren s und t erwarten?

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 (-3x^2 + 2x - 4)^2 dx} = 11\sqrt{\frac{2}{15}}$$

$s = 3u$ entsteht aus u durch Streckung mit dem Faktor 3. Also sollte die Länge von s 3 mal die Länge von u sein:

$$\|s\| = 3\|u\| = 33\sqrt{\frac{2}{15}}$$

Ebenso: $t = -4u$ sollte 4 mal so lang sein wie u, also

$$\|t\| = \| - 4u\| = 4\|u\| = 44\sqrt{\frac{2}{15}}$$

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren s und u berechnen.

Wir machen das grad allgemein für einen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\lambda u(x)\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 \lambda^2 u^2(x) dx} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 u^2(x) dx} = |\lambda| \sqrt{\int_0^1 u^2(x) dx} = |\lambda| \|u\|$$

Also

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Unsere Vermutung war also korrekt!

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren v und w.

$$\|v\| = \|2(x^2+3)\| = 2\sqrt{\int_0^1 (x^2+3)^2 dx} = 4\sqrt{\frac{14}{5}}$$

$$\|w\| = \sqrt{\int_0^1 (-x^2+3x-8)^2 dx} = \sqrt{\frac{1411}{30}}$$

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathcal{P}_2$?

Das Nullpolynom hat offensichtlich die Länge 0. Und es ist das einzige Polynom mit Länge 0, denn das Integral über das Quadrat unter der Wurzel

$$\sqrt{\int_0^1 p^2(x) dx}$$

ist nur 0, wenn der Integrand gleich 0 auf dem Intervall $[0, 1]$ ist, also nur wenn p das Nullpolynom ist.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathcal{P}_2$?

Nein, denn die Wurzel

$$\sqrt{\int_0^1 p^2(x)dx}$$

ist immer ≥ 0.

7.4 In der Tabelle sind die Vektorräume aufgeführt, welche in den vorhergehenden Aufgaben diskutiert worden sind. Da die drei Vektorräume ähnlich aufgebaut sind, würden wir auch die Existenz eines Skalarproduktes im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ erwarten. Vergleichen und kontrastieren Sie die Einträge in der Tabelle miteinander – welchen Ausdruck vermuten Sie für den leeren Tabelleneintrag?

Vektorraum V	Länge eines Vektors $v \in V$	Skalarprodukt zweier Vektoren $a, b \in V$
$\mathbb{R}^3$	$\|v\| = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3}$	$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
$\mathbb{R}^5$	$\|v\| = \sqrt{v_1 v_1 + \cdots + v_5 v_5}$	$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_5 b_5$
$\mathcal{P}_2$	$\|v\| = \sqrt{\int_0^1 v(x) v(x) dx}$	$\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x) b(x) dx$