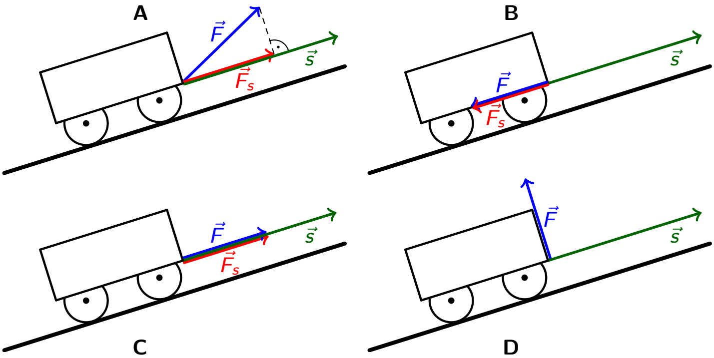
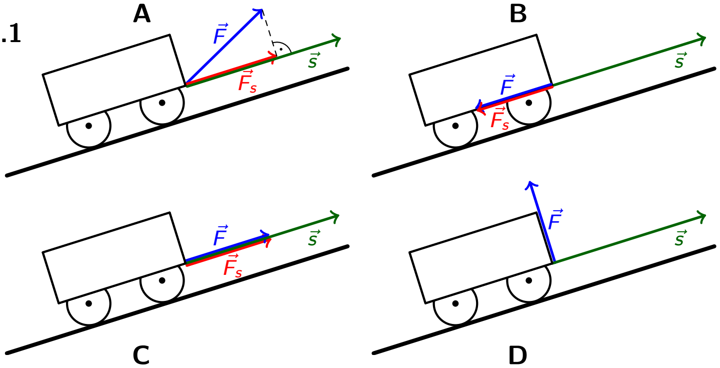
Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 8

8.1 Betrachten Sie die folgenden Situation, in welchen ein Wagen mit der Kraft $\vec{F}$ entlang einer Steigung gezogen wird.



8.1

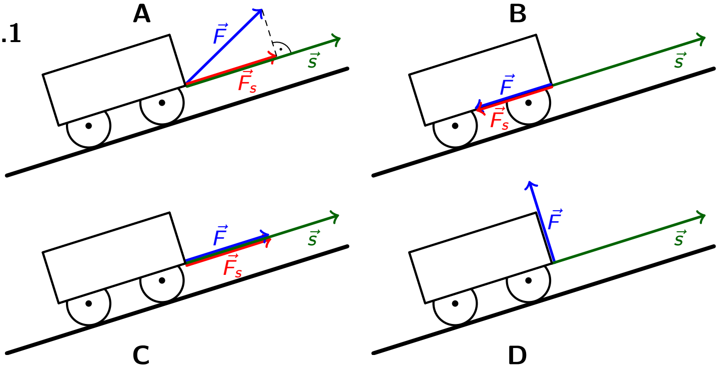


Vergleichen und kontrastieren Sie geometrisch und algebraisch die beiden Vektoren $\vec{F}_s$ und $\vec{s}$.

	geometrischer Vergleich	algebraischer Vergleich
A	$\vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sind parallel	$\vec{F}_s = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda > 0$
B	$\vec{F} = \vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sind antiparallel	$\vec{F}_s = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda < 0$
C	$\vec{F} = \vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sind parallel	$\vec{F}_s = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda > 0$
D	$\vec{F}_s = \vec{0}$	$\vec{F}_s = \lambda\vec{s}$ für $\lambda = 0$

Beachte: In jedem Fall gilt $\vec{F}_s = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

8.1



Vergleichen und kontrastieren Sie geometrisch und algebraisch die beiden Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s$.

	geometrischer Vergleich	algebraischer Vergleich
A	$\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s$ sind orthogonal	$\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$
B	$\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s = \vec{0}$ sind orthogonal	$\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$
C	$\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s = \vec{0}$ sind orthogonal	$\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$
D	$\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s = \vec{F}$ sind orthogonal	$\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$

Beachte: In jedem Fall gilt $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$.

Die folgenden beiden Relationen formalisieren die Beobachtungen aus den vorhergehenden Teilaufgaben:

i. $\vec{F_s} = \lambda\vec{s},\ \lambda \in \mathbb{R}$

ii. $\vec{F} - \ \vec{F_s}$ und $\vec{s}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \vec{F} - \vec{F_s}, \vec{s}\rangle = 0$

Finde damit einen Ausdruck für $\vec{F_s}$, der nur von $\vec{s}$ und $\vec{F}$ abhängt.

- Wegen ii. gilt e.: $\langle \vec{F} - \vec{F_s}, \vec{s}\rangle = 0$
- Mit i. ersetzt man in dieser Gleichung $\vec{F_s}$ durch $\lambda\vec{s}$ und bekommt b.: $\langle \vec{F} - \lambda\vec{s}, \vec{s}\rangle = 0$
- Linearität des Skalarprodukt liefert f.: $\langle \vec{F}, \vec{s}\rangle - \lambda\langle \vec{s}, \vec{s}\rangle = 0$
- Auflösen nach λ gibt d.: $\lambda = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s}\rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s}\rangle} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s}\rangle}{\|\vec{s}\|^2}$
- Nun verwenden wir c., also $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$, ersetzten darin λ durch den gefundenen Ausdruck in d. und erhalten a.

$$\vec{F_s} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s}\rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s}\rangle}\vec{s} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s}\rangle}{\|\vec{s}\|^2}\vec{s} = \langle \vec{F}, \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}\rangle \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}.$$

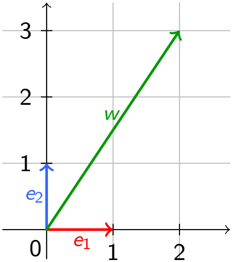
8.2 Wir möchten den Ausdruck aus Aufgabe 8.1 verallgemeinern. Dazu definieren wir für festes $v \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$\Pi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad u \mapsto \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Betrachten Sie die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8.2a) Zeichnen Sie $w = \binom{2}{3}$ im Koordinatensystem ein.



Drücken Sie w als eine Linearkombination von e_1 und e_2 aus.

Antwort: $w = 2e_1 + 3e_2$.

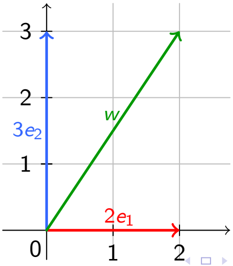
8.2b) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$. Zeichnen Sie diese Vektoren ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Was scheint die geometrische Interpretation dieser Vektoren zu sein?

Antwort:

$$\Pi_{e_1}(w) = \frac{\langle w, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = \langle w, e_1\rangle e_1 = 2e_1$$

$$\Pi_{e_2}(w) = \frac{\langle w, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 = \langle w, e_2\rangle e_2 = 3e_2$$

Die Projektionen $\Pi_{e_1}(w) = 2e_1$ und $\Pi_{e_2}(w) = 3e_2$ sind just die Summanden in der Linearkombination $w = 2e_1 + 3e_2$.



Drücken Sie w als Linearkombination von $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$ aus.

Antwort: $w = \Pi_{e_1}(w) + \Pi_{e_2}(w)$

8.2c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben a) und b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen?

Antwort:

Aus a): $w = 2e_1 + 3e_2$.

Aus b): $w = \Pi_{e_1}(w) + \Pi_{e_2}(w) = \langle w, e_1\rangle e_1 + \langle w, e_2\rangle e_2$

Also: Die Koeffizienten der Linearkombination ergeben sich einfach als Skalarprodukt des Vektors w mit den Basisvektoren.

Warum gilt das allgemein?
Sei $w = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Dann folgt

$$\langle w, e_1\rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_1\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{=0} = \lambda_1$$

$$\langle w, e_2\rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_2\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle e_1, e_2\rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle e_2, e_2\rangle}_{=1} = \lambda_2$$

8.3 In der folgenden Aufgabe möchten wir die Abbildung von Aufgabe 8.2 für den Vektorraum $\mathcal{P}_1$ untersuchen:

$$\Pi_p : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1, \quad q \mapsto \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das folgende Skalarprodukt des Vektorraumes $\mathcal{P}_1$ bezeichnet:

$$\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \langle q, p\rangle := \int_0^1 q(x)p(x)dx$$

Betrachten Sie die Polynome

$$p_1(x) = 2, \; p_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \; s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}.$$

8.3a) Drücken Sie s als Linearkombination von p_1 und p_2 aus.

Antwort:

$$s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} \stackrel{!}{=} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 2 + \lambda_2(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})$$

Koeffizientenvergleich (Gauss!) liefert: $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

8.3b) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1, p_1\rangle, \langle p_2, p_2\rangle, \langle p_1, p_2\rangle$.

Antwort.

$$\langle p_1, p_1\rangle = \int_0^1 2^2 dx = 4.$$

$$\langle p_2, p_2\rangle = \int_0^1 (2\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 dx = 1.$$

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_0^1 2(2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) dx = 0.$$

8.3c) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$. Drücken Sie s als Linearkombination von $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$ aus.

Antwort.

$$\Pi_{p_1}(s) = \frac{\langle s, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1 = \frac{\langle s, p_1\rangle}{4} p_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4} p_1$$

$$\Pi_{p_2}(s) = \frac{\langle s, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle} p_2 = \frac{\langle s, p_2\rangle}{1} p_2 = -1/2 p_2$$

Also

$$s = \Pi_{p_1}(s) + \Pi_{p_2}(s).$$

8.3d) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben a) und b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen?

Antwort:

Aus a): $s = \frac{9\sqrt{3}}{4} p_1 + \frac{-1}{2} p_2$.

Aus b):

$\Pi_{p_1}(s) + \Pi_{p_2}(s) = \frac{\langle s, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 + \frac{\langle s, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} p_2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} p_1 + \frac{-1}{2} p_2 = s$

Also: Die Koeffizienten der Linearkombination ergeben sich einfach als Skalarprodukt des Vektors s mit den Basisvektoren dividiert durch das Quadrat der Normen der Basisvektoren.

Es ist wird also noch einfacher, wenn wir die orthogonalen Basisvektoren normieren (wie in 8.2)!