

Lösungen Serie 3

1. Die Norm $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|$ wird von einem Skalarprodukt induziert.

- (a) richtig
✓ (b) falsch

Diese Norm erfüllt die Parallelogrammregel nicht und wird daher nicht von einem Skalarprodukt induziert (vgl. Aufgabe 9a) dieser Serie). In der Tat haben wir für $v = (1, 0)^\top$ und $w = (0, 1)^\top$

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \|(1, 1)^\top\|^2 + \|(1, -1)^\top\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) &= 2(1^2 + 1^2) = 4, \end{aligned}$$

also

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \neq 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

2. $\langle a, b \rangle := ab$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathbb{R} .

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

$\langle a, b \rangle := ab$ erfüllt die Eigenschaften eines Skalarprodukts auf \mathbb{R} :

1. linear im ersten Faktor:

$$(i) \langle a_1 + a_2, b \rangle = (a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$$

$$(ii) \langle \alpha a, b \rangle = (\alpha a)b = \alpha(ab) = \alpha \langle a, b \rangle$$

2. symmetrisch: $\langle a, b \rangle = ab = ba = \langle b, a \rangle$

3. positiv definit: $\langle a, a \rangle = a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $\langle a, a \rangle = a^2 = 0$ folgt $a = 0$.

3. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\|_\infty^2 = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}^2 = \max\{x_1^2, \dots, x_n^2\} \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|_2^2$$

und

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2 \sum_{i < j} |x_i| \cdot |x_j| \geq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|_2^2.$$

Daher gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

4. Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_n(x)| dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(nx)^2} = \frac{1}{n} \arctan(nx) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{n} \cdot (\arctan n - \arctan(-n)) = \frac{2}{n} \arctan n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge von Funktionen $f_n(x)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

5. Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

- (a) richtig
✓ (b) falsch

Nach Definition der Maximumnorm auf $C^0([-1, 1])$ haben wir

$$\|f_n\|_\infty = \max\{|f_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\} = \max\left\{\frac{1}{1+(nx)^2} : -1 \leq x \leq 1\right\} = 1.$$

Somit konvergiert die Folge von Funktionen $f_n(x)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ nicht gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

6. Der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum \mathbb{R} .

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Der Betrag $|\cdot|$ auf \mathbb{R} erfüllt die Eigenschaften einer Norm:

1. Es gilt $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $|a| = 0$ folgt $a = 0$.
2. Für alle $a, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$.

7. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $\langle x, y \rangle := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in V ein Skalarprodukt definiert.

b) Wie sieht die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\| \cdot \|$ aus?

c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass $D = \text{diag}(2, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ist. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\langle x, y \rangle := x^\top D y = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + \frac{1}{3}x_2y_2.$$

a) Wir kontrollieren die Eigenschaften eines Skalarprodukts:

(a) Für alle $x, y, z \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\langle x + y, z \rangle = (x + y)^\top D z = x^\top D z + y^\top D z = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$

ii) $\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x)^\top D y = \alpha x^\top D y = \alpha \langle x, y \rangle.$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist also linear im ersten Faktor.

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch, denn für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\langle x, y \rangle = x^\top D y \stackrel{x^\top D y \in \mathbb{R}}{=} (x^\top D y)^\top = y^\top D^\top x = y^\top D x = \langle y, x \rangle.$$

Bemerkung: Für D nicht symmetrisch ist $\langle x, y \rangle = x^\top D y$ nicht mehr symmetrisch, also kein Skalarprodukt.

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit, denn:

$$\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

$$\langle x, x \rangle = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ also } x = 0.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist also ein Skalarprodukt in V .

b) Die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top D x} = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}.$$

c) $\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}3^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$

8. Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

ausstatten.

- Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.
- Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} (\cos(u - v) - \cos(u + v)) \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} (\cos(u - v) + \cos(u + v)) \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} (\sin(u - v) + \sin(u + v)) \end{aligned}$$

Lösung:

- Wir müssen die Orthogonalitätsrelationen $\langle f_m, f_n \rangle = 0$, $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ für $m \neq n$ sowie $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ zeigen. Wir benutzen dafür die trigonometrischen Identitäten aus dem Hinweis und rechnen zuerst die drei Relationen für $m \neq n$ nach:

$$\begin{aligned} \langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} (\alpha_m \cos(mx)) \cdot (\alpha_n \cos(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \alpha_m \alpha_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m - n)x) dx + \int_0^{2\pi} \cos((m + n)x) dx \right) \\ &\stackrel{m \neq n}{=} \frac{1}{2} \alpha_m \alpha_n \left(\frac{1}{m - n} \sin((m - n)x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{m + n} \sin((m + n)x) \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha_m \alpha_n (0 - 0 + 0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g_m, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} (\beta_m \sin(mx)) \cdot (\beta_n \sin(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \beta_m \beta_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m - n)x) dx - \int_0^{2\pi} \cos((m + n)x) dx \right) \\ &\stackrel{m \neq n}{=} \frac{1}{2} \beta_m \beta_n \left(\frac{1}{m - n} \sin((m - n)x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m + n} \sin((m + n)x) \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \beta_m \beta_n (0 - 0 - 0 + 0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} (\alpha_n \cos(nx)) \cdot (\beta_m \sin(mx)) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n \beta_m \left(\int_0^{2\pi} \sin((m-n)x) \, dx + \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x) \, dx \right) \\
&\stackrel{m \neq n}{=} \frac{1}{2} \alpha_n \beta_m \left(-\frac{1}{m-n} \cos((m-n)x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n} \cos((m+n)x) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n \beta_m \left(-\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt die dritte Relation für $m = n \geq 1$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} (\alpha_n \cos(nx)) \cdot (\beta_n \sin(nx)) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n \beta_n \left(\int_0^{2\pi} \sin(0) \, dx + \int_0^{2\pi} \sin(2nx) \, dx \right) \\
&\stackrel{n \geq 1}{=} \frac{1}{2} \alpha_n \beta_n \left(0 - \frac{1}{2n} \cos(2nx) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n \beta_n \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

b) Für $n, m \geq 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} (\alpha_n \cos(nx)) \cdot (\alpha_n \cos(nx)) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos(0) \, dx + \int_0^{2\pi} \cos(2nx) \, dx \right) \\
&\stackrel{n \geq 1}{=} \frac{1}{2} \alpha_n^2 \left(2\pi + \frac{1}{2n} \sin(2nx) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_n^2 (2\pi + 0 - 0) = \alpha_n^2 \pi, \\
\langle g_m, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} (\beta_m \sin(mx)) \cdot (\beta_m \sin(mx)) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \beta_m^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos(0) \, dx - \int_0^{2\pi} \cos(2mx) \, dx \right) \\
&\stackrel{m \geq 1}{=} \frac{1}{2} \beta_m^2 \left(2\pi - \frac{1}{2m} \sin(2mx) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \beta_m^2 (2\pi - 0 + 0) = \beta_m^2 \pi
\end{aligned}$$

und für $n = 0$

$$\langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^{2\pi} (\alpha_0 \cdot 1)(\alpha_0 \cdot 1) \, dx = \alpha_0^2 \cdot (2\pi).$$

Die Funktionen f_n und g_m haben genau dann Norm 1, wenn $\langle f_n, f_n \rangle = 1$ und $\langle g_m, g_m \rangle = 1$ gilt. Somit muss $\alpha_n^2 \pi = 1$ für $n \geq 1$ und $\beta_m^2 \pi = 1$ für

$m \geq 1$ sowie $2\alpha_0^2 \pi = 1$ gelten. Also muss gelten:

$$\alpha_n = \beta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \forall n, m \geq 1 \text{ und}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

9.

- a) Sei $\|\cdot\|$ eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf $C^0([a, b])$ die Axiome einer Norm erfüllt.

- c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.

Lösung:

- a) Wir nehmen an, dass $\|\cdot\|$ vom Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert ist. Wir rechnen die Parallelogrammregel unter Ausnutzung der Bilinearität und Symmetrie nach:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

- b) • (i) Für jede Funktion $f \in C^0([a, b])$ gilt

$$\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \geq 0.$$

- (ii) Aus $\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, also $f \equiv 0$.

- Für jede Funktion $f \in C^0([a, b])$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{L^\infty} &= \max\{|\alpha \cdot f(x)| : a \leq x \leq b\} = \max\{|\alpha| \cdot |f(x)| : a \leq x \leq b\} \\ &= |\alpha| \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} = |\alpha| \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

- Für alle Funktionen $f, g \in C^0([a, b])$ gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^\infty} &= \max\{|f(x) + g(x)| : a \leq x \leq b\} \\ &\leq \max\{|f(x)| + |g(x)| : a \leq x \leq b\} \\ &\leq \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} + \max\{|g(x)| : a \leq x \leq b\} \\ &= \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

c) Wir machen den Ansatz

$$P_2(x) = x^2 + ax + b$$

für ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht. Die Relationen $\langle P_2, P_0 \rangle = 0$ und $\langle P_2, P_1 \rangle = 0$ liefern zwei lineare Gleichungen für die Koeffizienten a und b :

$$0 = \langle P_2, P_0 \rangle = \int_0^1 (x^2 + ax + b) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b,$$

$$0 = \langle P_2, P_1 \rangle = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a + 6b &= -2 \\ 4a + 6b &= -3, \end{aligned}$$

welches wir mit dem Gaussverfahren lösen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \end{array} \right]$$

Also ist die eindeutige Lösung durch $a = -1$ und $b = \frac{1}{6}$ gegeben und

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

ist ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.