

Lösungen Serie 5

1. Die Abbildung $V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis \mathcal{B} zuordnet, ist linear.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und seien $x, y \in V$ mit

$$\begin{aligned}x &= x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, \\y &= y_1 b_1 + \dots + y_n b_n.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$x + y = (x_1 + y_1)b_1 + \dots + (x_n + y_n)b_n$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1)b_1 + \dots + (\lambda x_n)b_n.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}[x + y]_{\mathcal{B}} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^{\top} = (x_1, \dots, x_n)^{\top} + (y_1, \dots, y_n)^{\top} \\&= [x]_{\mathcal{B}} + [y]_{\mathcal{B}}, \\[\lambda x]_{\mathcal{B}} &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^{\top} = \lambda(x_1, \dots, x_n)^{\top} = \lambda[x]_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

die Abbildung $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ ist also linear.

2. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im \mathbb{R}^3 ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Für die Bilder der Standardbasisvektoren unter \mathcal{F} bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e_1) &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 = e_1, \\ \mathcal{F}(e_2) &= \langle e_2, e_1 \rangle e_1 = 0, \\ \mathcal{F}(e_3) &= \langle e_3, e_1 \rangle e_1 = 0. \end{aligned}$$

Da in den Spalten der Darstellungsmatrix von \mathcal{F} die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren stehen, ist \mathcal{F} in der Tat durch diese Darstellungsmatrix gegeben.

3. Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von \mathcal{F} liegt.

- (a) richtig
✓ (b) falsch

Der Kern von $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist in \mathbb{R}^3 enthalten und das Bild von F ist in \mathbb{R} enthalten. Da es keine Vektoren gibt, die gleichzeitig im \mathbb{R}^3 und in \mathbb{R} liegen, existieren keine Vektoren, die gleichzeitig im Kern und im Bild von F liegen.

4. Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

- ✓ (a) richtig
(b) falsch

Wir nehmen an, dass A eine $m \times n$ -Matrix ist. Man beachte, dass $\text{Bild}(A)$ der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum von \mathbb{R}^m ist. Somit liegt die gegebene Linearkombination x von Spalten von A in $\text{Bild}(A)$. Weiter liegt die gegebene Lösung y von $A^\top y = 0$ in $\text{Kern}(A^\top)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unterräume $\text{Bild}(A)$ und $\text{Kern}(A^\top)$ von \mathbb{R}^m bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander stehen. Darum stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

5. Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

✓ (a) richtig

(b) falsch

Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird bezüglich der Standardbasis durch eine $n \times n$ -Matrix A beschrieben, die Abbildung \mathcal{F} ist also gegeben durch $x \mapsto Ax$. Falls der Kern von \mathcal{F} nur aus dem Nullvektor besteht, hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Das ist äquivalent dazu, dass die Matrix A invertierbar ist und daher ist \mathcal{F} invertierbar.

6. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für Kern A und Bild A .

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Kern } A &= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}, \\ \text{Bild } A &= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^4, \text{ so dass } y = Ax\} \end{aligned}$$

Aus dem Buch von Nipp/Stoffer, Anfang Kapitel 6, wissen wir, dass für eine $m \times n$ -Matrix A gilt:

- (i) $\dim(\text{Bild } A) + \dim(\text{Kern } A) = r + (n - r) = n$, wobei $r = \text{Rang } A$.
- (ii) $\text{Bild } A = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$, wobei $a^{(i)}$ die i -te Spalte von A bezeichnet.

Wir lösen also zunächst $Ax = 0$ mit Gaußelimination:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Man wähle $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_3 = \beta \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 &\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta), \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha) \end{aligned}$$

und somit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Kern A .

Aus (i) folgt $\dim(\text{Bild } A) = 4 - \dim(\text{Kern } A) = 2$. Wegen (ii) müssen wir also 2 linear unabhängige Spaltenvektoren von A auswählen. Aus dem obigen

Gauss-Schema sieht man, dass z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von Bild A .

7. Wir betrachten die Ebene E in \mathbb{R}^3 , gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

- Durch welche Matrix A wird \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschrieben?
- Bestimmen Sie Kern A und $\dim(\text{Kern } A)$.
- Bestimmen Sie Bild A und $\dim(\text{Bild } A)$.

Lösung:

- Betrachte die Standardbasis e_1, e_2, e_3 . Der Vektor e_1 steht senkrecht zu E . Die Abbildung \mathcal{F} projiziert e_1 also auf $0 \in E$:

$$\mathcal{F}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(1)}.$$

Da e_2 und e_3 bereits in E liegen, folgt:

$$\mathcal{F}(e_2) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(2)},$$

$$\mathcal{F}(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: a^{(3)}.$$

Es folgt

$$A = (a^{(1)} \ a^{(2)} \ a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Kern A ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$, besteht also aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 = x_3 = 0$. Somit ist

$$\text{Kern } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und es folgt $\dim(\text{Kern } A) = 1$.

- Es gilt $\text{Bild } A = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$. Da $a^{(1)} = 0$ ist und $a^{(2)}, a^{(3)}$ offensichtlich linear unabhängig sind, folgt

$$\text{Bild } A = \text{span}\{a^{(2)}, a^{(3)}\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = E.$$

und $\dim(\text{Bild } A) = 2$.

8. Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Betrachten Sie die folgende Abbildung \mathcal{F} von \mathcal{P}_2 in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}} Q(x) = (2-x)P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

\mathcal{F} ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

- a) Zeigen Sie: \mathcal{F} ist eine lineare Abbildung.
 b) Durch welche Matrix A wird \mathcal{F} bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von \mathcal{P}_2 beschrieben?

Lösung:

- a) Seien $P(x), Q(x) \in \mathcal{P}_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P(x) + Q(x)) &= (2-x)(P(x) + Q(x))' = (2-x)(P'(x) + Q'(x)) \\ &= (2-x)P'(x) + (2-x)Q'(x) = \mathcal{F}(P(x)) + \mathcal{F}(Q(x)), \\ \mathcal{F}(\alpha P(x)) &= (2-x)(\alpha P(x))' = \alpha(2-x)P'(x) = \alpha\mathcal{F}(P(x)). \end{aligned}$$

Daher ist \mathcal{F} linear.

- b) Wir betrachten die Basis $b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x, b^{(3)} = x^2$ von \mathcal{P}_2 . Wir suchen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass

$$\mathcal{F}(b^{(j)}) = \sum_{k=1}^3 a_{kj} b^{(k)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

In Koordinaten:

$$\mathcal{F}(b^{(1)}) = \mathcal{F}(1) = (2-x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}(b^{(2)}) = \mathcal{F}(x) = (2-x) \cdot 1 = 2-x \Rightarrow a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}(b^{(3)}) = \mathcal{F}(x^2) = (2-x) \cdot 2x = 4x - 2x^2 \Rightarrow a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (a^{(1)} \ a^{(2)} \ a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$