Lösungen Serie 12

1. Welche Dimension hat der Lösungsraums des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1' \end{aligned}$$

(a) 2

(b) 3

√ (c) 5

(d) 6

Das gegebene Differentialgleichungssystem kann durch die Substitution

$$Z := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

auf das System 1. Ordnung

$$Z' = AZ$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

zurückgeführt werden. Nach einem Satz aus der Vorlesung hat der Lösungsraum dieses System die Dimension 5. Daher hat auch der Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystems die Dimension 5.

2. Für die Wronski-Determinante W zweier reeller Funktionen ϕ_1, ϕ_2 gelte $W(0) = 1$ und $W(1) = -1$. Jemand behauptet, (ϕ_1, ϕ_2) sei die Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Kann diese Behauptung zutreffen?

(a) Ja.

√ (b) Nein.

Falls ϕ_1 und ϕ_2 eine Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung bilden, dann ist nach einem Satz aus der Vorlesung die Wronski-Determinante $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da in diesem Fall ϕ_1, ϕ_1', ϕ_2 und ϕ_2' als differenzierbare Funktionen alle stetig sind, ist auch W eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Darum impliziert $W(0) = 1$ und $W(1) = -1$ mit dem Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in]0, 1[$ mit $W(x) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit können ϕ_1 und ϕ_2 keine Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung sein.

3. Seien S_I und S_H die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) $S_H \cap S_I$ ist leer.

(b) $S_H \cap S_I = \{0\}$.

(c) $S_H \cap S_I$ ist ein Vektorraum.

Eine echt inhomogene lineare Differentialgleichung ist von der Form

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + f,$$

wobei $a_i = a_i(x)$ und $f = f(x)$ stetige Funktionen sind und f nicht die Nullfunktion ist. Für eine Lösung $y = y(x)$ einer solchen Differentialgleichung gilt

$$y^{(n)} \neq a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)},$$

weil f nicht die Nullfunktion ist, d.h. y ist keine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}.$$

Es gibt also keine Funktionen, die gleichzeitig Lösung einer echt inhomogenen linearen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung sind. Somit ist $S_H \cap S_I$ leer. Daher ist $S_H \cap S_I$ verschieden von $\{0\}$ und auch kein Vektorraum, weil Vektorräume nach Definition nicht leer sind.

4.

a) Man verwandle das lineare System zweiter Ordnung für die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$

$$\begin{aligned} y'' &= xy + y' + e^x z \\ z'' &= y - x^2 y' + \sin(x) z' \end{aligned}$$

in ein lineares System 1. Ordnung.

b) Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Lösung:

a) Das gegebene System ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ z' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x^2 & 0 & \sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares System 1. Ordnung $Y' = AY$ mit

$$Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}, \quad A = A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x^2 & 0 & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

b) Weil dies ein homogenes lineares System 1. Ordnung von 4 Differentialgleichungen ist, hat der Lösungsraum nach einem Satz aus der Vorlesung die Dimension 4.

5. *Der angeregte harmonische Oszillator:*

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt einen periodisch angeregten harmonischen Oszillator mit der Grundfrequenz $\omega \neq 1$ und $\omega \neq 0$.

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.
Hinweis: Siehe Folien zur Vorlesung vom 18. Mai.

b) Man bestimme eine partikuläre Lösung.
Hinweis: Ansatz $Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

Lösung:

a) Das dazugehörige homogene System ist gegeben durch $Y' = AY$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \omega^2 \overset{!}{=} 0,$$

also durch $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = i\omega$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i\omega & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -i\omega & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \omega & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

also ist $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = i\omega$. Daraus folgt mit komplexer Konjugation, dass $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i\omega$ ist.

Die Funktionen $\phi_1(t) := e^{\lambda_1 t} v_1$ und $\phi_2(t) := e^{\lambda_2 t} v_2$ sind Lösungen des homogenen Systems, weil für $i = 1, 2$

$$\phi_i'(t) = e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i = e^{\lambda_i t} A v_i = A\phi_i(t)$$

gilt. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (da $\omega \neq 0$) sind sie linear unabhängig und bilden daher eine Basis des Lösungsraums, weil es sich um ein System 1. Ordnung von zwei Differentialgleichungen handelt.

Da die Koeffizientenmatrix A reell ist, sind auch

$$\mathrm{Re}(\phi_1)(t) = \mathrm{Re}\left((\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{Im}(\phi_2)(t) = \mathrm{Im}\left((\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Lösungen. Diese reellen Lösungen bilden ebenfalls eine Basis des Lösungsraums, weil die Sinus- und Cosinusfunktion linear unabhängig sind.

b) Einsetzen des Ansatzes
$$Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$
in das gegebene inhomogene System ergibt
$$\begin{pmatrix} c\cos(t) \\ -c\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(t) \\ -\omega^2 c\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$
Dieser Ansatz liefert also genau dann eine partikuläre Lösung, wenn
$$-c = -\omega^2 c + 1,$$
also $c = \frac{1}{\omega^2-1}$ gilt (man beachte, dass $\omega^2 - 1 \neq 0$, weil $\omega \neq 1$ ist). Somit ist
$$\psi(t) := \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$
eine partikuläre Lösung.

c) Die allgemeine Lösung des angeregten Systems ist durch $\psi(t) + S_H$ gegeben, wobei $\psi(t)$ die partikuläre Lösung aus b) ist und S_H den Lösungsraum des homogenen Systems aus a) bezeichnet. Somit ist
$$Y(t) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$
mit $A, B \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

6. *Der gedämpfte harmonische Oszillator:*

$$y'' = -\omega^2 y - y'$$

beschreibt einen durch Reibung gedämpften harmonischen Oszillator bei unterkritischer Dämpfung (d.h. $\omega > \frac{1}{2}$).

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums.

b) Man berechne die Wronski-Determinante für die gewählte Basis.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung an.

Lösung:

a) Mit

$$Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

kann die gegebene Differentialgleichung auf das System 1. Ordnung

$$Y' = AY$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1 \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix A sind gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \omega^2 \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\omega^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\alpha$$

mit

$$\alpha := \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}} \stackrel{\omega > \frac{1}{2}}{>} 0.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\alpha$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - i\alpha & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -\frac{1}{2} - i\alpha & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & \lambda_2 & 0 \end{array} \right).$$

Weil die algebraische Vielfachheit von λ_1 gleich 1 ist, ist auch dessen geometrische Vielfachheit gleich 1. Daher sind die beiden Zeilen der Matrix dieses LGS linear abhängig und eine Lösung der ersten Zeile erfüllt gleichzeitig die zweite Zeile. Somit ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.

Daraus folgt mit komplexer Konjugation, dass $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ist.

Wie bei Aufgabe 5a) sind

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\alpha \end{pmatrix}$$

und

$$\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\alpha \end{pmatrix}$$

Lösungen des Systems $Y' = AY$. Somit sind $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\alpha t}$ und $y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-i\alpha t}$ Lösungen der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung. Weil A eine reelle Matrix ist, sind auch die reellen Funktionen

$$\psi_1(t) = \mathrm{Re}(y_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\alpha t), \;\; \psi_2(t) = \mathrm{Im}(y_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\alpha t)$$

Lösungen. Da die Sinus- und Cosinusfunktion linear unabhängig sind und es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, bilden $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ eine Basis des Lösungsraums.

b) Für die Wronski-Determinante von (ψ_1, ψ_2) erhalten wir

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\alpha t) & e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\alpha t) \\ e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{1}{2}\cos(\alpha t) - \alpha \sin(\alpha t)) & e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{1}{2}\sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t)) \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}(\alpha \cos^2(\alpha t) + \alpha \sin^2(\alpha t)) = \alpha e^{-t}. \end{aligned}$$

Die Wronski-Determinante ist also für alle $t \in \mathbb{R}$ verschieden von Null. Dies stimmt mit dem Satz aus der Vorlesung überein, der besagt, dass dies der Fall ist, wenn (ψ_1, ψ_2) eine Basis des Lösungsraums ist.

c) Die allgemeine Lösung wird durch $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ aufgespannt, also ist sie durch

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))$$

mit A, $B \in \mathbb{R}$ gegeben.