

Serie 9

1. Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A .

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

2. Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

3. Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

- (a) Wahr.
- (b) Falsch.

4. Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000 \frac{\text{U}}{\text{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

1. Messung: $X_1 = 1; Y_1 = 1$
2. Messung: $X_2 = 2; Y_2 = 2$
3. Messung: $X_3 = 4; Y_3 = 3$.

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

- (a) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.
- (b) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.
- (c) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.
- (d) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

5. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\ x_2 - 3 &= r_2 \\ x_2 - 4 &= r_3. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^T c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

- (a) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.
- (b) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- (c) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (d) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.