Singulärwertzerlegung

Definition

Sei $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- Die konjugiert transponierte Matrix $U^* := \bar{U}^\top$ heisst **adjungierte Matrix**.
- Falls $U^* U = \mathbb{I}$, so heisst U **unitär**.

Bemerkung: Für eine *reelle* Matrix A gilt also:

- $A^* = A^\top$, und somit
- A unitär $\iff$ A orthogonal

Beipsiel

Die Pauli-Matrix $\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ist unitär, denn

$$\sigma_2^* \sigma_2 = \bar{\sigma}_2^\top \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz (Singulärwertzerlegung)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann existierten

- unitäre Matrizen $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$
- $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ der Form

$$S = \left(\begin{array}{ccc|cc} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

so, dass

- $A = USV^*$
- $r = \text{Rang}(A)$
- Die **Singulärwerte** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ von A sind die Quadratwurzeln der von 0 verschiedenen Eigenwerte von A^*A. Insbesondere ist S eindeutig durch A bestimmt.

Bemerkung: Ist A reell, so sind auch U und V reell.

Anwendung: Seien X, Y reelle VR, $\mathcal{F}: X \to Y$ linear, $\mathcal{B}$ eine Basis von X, $\mathcal{C}$ eine Basis von Y. Sei $[\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}}$ die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich dieser Basen, d.h. für $y = \mathcal{F}(x)$ gilt

$$[y]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Sei nun

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}} = USV^\top$$

die Singulärwertzerlegung. **Wir wählen nun neue Basen $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ so, dass V und U gerade die Übergangsmatrizen sind**, d.h.

$$[x]_{\mathcal{B}} = V[x]_{\mathcal{B}'}, \quad [y]_{\mathcal{C}} = U[y]_{\mathcal{C}'}$$

(um die Basisvektoren b_i' von $\mathcal{B}'$ zu finden setze $x = b_i'$, und analog für $\mathcal{C}'$). Also

$$U[y]_{\mathcal{C}'} = [y]_{\mathcal{C}} = [\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}}[x]_{\mathcal{B}} = [\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}} V[x]_{\mathcal{B}'}$$

Für die Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ gilt somit

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} = U^\top [\mathcal{F}]_{\mathcal{BC}} V = S$$

Die Singulärwertzerlegung erlaubt es also, im Bild- und im Urbildraum Basen so zu wählen, so dass die Darstellungsmatrix besonders einfach wird!

Bemerkung:

- In Matlab erhält man die Singulärwertzerlegung via

```
[U,S,V] = svd(A)
```

- Die Singulärwertzerlegung hat Anwendungen in der Numerik, der Statistik, der Signalverarbeitung, der Ausgleichsrechnung usw.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A = USV^\top = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist also eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$, dann eine Streckung mit Faktor $2\sqrt{2}$ in Richtung der x_1-Achse und eine Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$ in Richtung x_2-Achse, gefolgt von einer Drehung um $\frac{\pi}{4}$. Das Bild des Einheitskreises somit ist eine Ellipse mit den Singulärwerten $2\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ als Halbachsen.

Normalform quadratischer reeller Matrizen

Satz

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ halbeinfach. Dann ist A ähnlich zu einer reellen Blockdiagonalmatrix
$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix}$$
wobei $D_j = (\lambda_j) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ oder $D_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Dabei sind λ_j respektive $a_j \pm ib_j$ EW von A.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist A ähnlich zu einer reellen oberen Blockdreiecksmatrix
$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & * \\ & D_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix}$$
wobei $D_j = (\lambda_j) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ oder $D_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Dabei sind λ_j respektive $a_j \pm ib_j$ EW von A.

Bemerkungen:

- $Q := \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix mit Determinante $+1$. Daher beschreibt

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\, Q$$

  eine Drehstreckung.
- $D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ hat die EW $a \pm ib$ mit EV $\begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix}$ Daher gilt für $T = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$T^{-1}DT = \mathrm{diag}(a+ib, a-ib)$$

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 0 \\ -13 & 9 & 0 \\ -17 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Dann hat A die EW $1+i$, $1-i$ und 2

mit den zugehörigen EV $\begin{pmatrix} 5 \\ 8+i \\ 11+2i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 8-i \\ 11-2i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daher gilt für $T = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 8+i & 8-i & 0 \\ 11+2i & 11-2i & 1 \end{pmatrix}$

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(1+i, 1-i, 2)$$

Wegen der letzten Bemerkung wählen wir $T' = \begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

erhalten die relle Blockdiagonalform von A

$$T' T^{-1} A T T'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Der PageRank Algorithmus

Google-Gründer: Larry Page und Sergei Brin (Stanford, 1997)

PageRank

PageRank $:=$ Googles Bewertung einer Seite
$=$ Reputation einer Seite

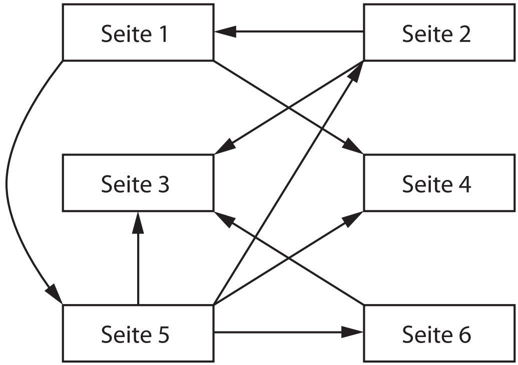
Gemäss dieser Bewertung werden die Seiten bei der Trefferausgabe sortiert.

Der Erwerb von Reputation geschieht durch Empfehlung durch andere reputierte Seiten: Je reputierter der Empfehlende ist, desto mehr Gewicht hat seine Empfehlung.

Googles Modell: Jeder Link auf eine Seite ist eine Empfehlung.

Ausschnitt aus dem Internet

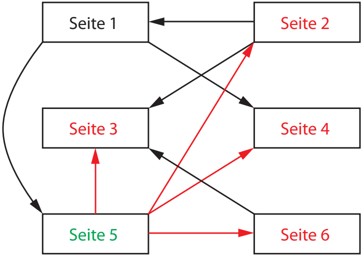
Jeder Link wird durch einen Pfeil dargestellt:



Dies ist ein **gerichteter Graph**.

Zufallssurfer-Modell

Prinzip: Ein Surfer auf einer Seite klickt zufällig einen Link darauf an.



Landungsseite \ Startseite	1	2	3	4	5	6
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
2	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
3	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1
4	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0
5	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0

Die Matrix $A = (a_{ij})$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Landungsseite i ausgehend von einer Startseite j getroffen wird.

Zufallssurfer-Modell

Sei $p_i^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, nach n Klicks auf Seite i zu landen. Wir starten auf Seite 1, d.h.

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach einem Klick gilt:

$$p^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p^{(0)}}$$

Zufallssurfer-Modell

Wir lesen ab:

Lemma

Nach n Klicks ist die Wahrscheinlichkeit, auf Seite i zu sein gegeben durch:

$$p_i^{(n)} = A^n p^{(0)}$$

Beobachtung

Für $n \to \infty$ konvergiert $p^{(n)}$ gegen eine stationäre Verteilung $p^{(\infty)}$. Für diese gilt:

$$p^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} Ap^{(n-1)} = A \lim_{n\to\infty} p^{(n-1)} = Ap^{(\infty)}$$

D.h. $p^{(\infty)}$ ist ein **EV von A zum EW 1**!

Zufallssurfer-Modell

Definition

Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $p^{(\infty)}$ ergibt den PageRank der Seiten: $p_i^{(\infty)}$ ist der PageRank der Seite i.

Bemerkung: Google verwendet als PageRank ein geeignetes Vielfaches von $p_i^{(\infty)}$.

Satz (Perron-Frobenius, 1907, 1912)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass alle $a_{ij} > 0$. Seien $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots$ die EW von A. Dann gilt:

- $\lambda_1 > |\lambda_2|$, insbesondere ist der Eigenraum zu λ_1 eindimensional.
- Es gibt einen EV x_1 zum EW λ_1 mit lauter positiven Komponenten.
- Für $p^{(0)} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ und $p^{(n)} = Ap^{(n-1)}$ konvergiert die Folge $p^{(n)}/\|p^{(n)}\|$ gegen einen EV zum EW λ_1.

Problem: Die Vorraussetzung $a_{ij} > 0$ ist für das Internet nicht erfüllt. Insbesondere gibt es isolierte Bereiche von Seiten im Internet, die zwar unter sich verlinkt sind und aus denen auch Links hinausführen, in die aber keine Links hineinführen. Unser von aussen kommender Zufallssurfer wird einen solchen Bereich also niemals besuchen. Der ganze Bereich bekäme PageRank 0!

Idee von Page und Brin: Ersetze $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

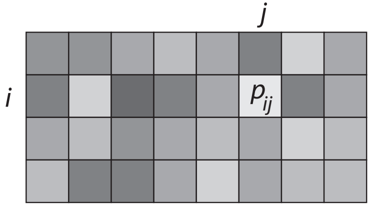
$$\tilde{A} := \alpha A + (1-\alpha)E, \text{ wobei } E = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $0 < \alpha < 1$ ein Parameter (Google verwendete ursprünglich $\alpha = 0.85$). D.h. unser Surfer wählt mit Wahscheinlichkeit $1 - \alpha$ auch **irgendeine Seite** die nicht von aussen verlinkt ist, statt einem Link zu folgen.

Witz dabei: $\tilde{A}$ erfüllt die Voraussetzungen von Frobenius-Perron und der PageRank kann durch Iteration gefunden werden!

Bildverarbeitung

Ein digitales Bild ist ein Array von Zahlen p_{ij}, wobei jedes p_{ij} den Grau- oder Farbwert des Pixels an der Position (i, j) angibt:



Wir betrachten Bilder fester Grösse: $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Auf diese Weise können wir Bilder als Elemente des Vektorraums $V := \mathbb{R}^{mn}$ auffassen.

Weichzeichner

Um Konturen zu verwischen, ersetzen wir den Wert jedes Pixel durch das arithmetische Mittel seiner unmittelbaren Nachbarn und von sich selber:

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{9}(p_{ij} + p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1} + \\ + p_{i-1,j-1} + p_{i+1,j+1} + p_{i-1,j+1} + p_{i+1,j-1})$$

Für Pixel am Bildrand und in der Ecke hat die Formel entsprechend weniger Terme. Die Abbildung $V \to V, p \mapsto \tilde{p}$, ist linear. Das Resultat sieht so aus:

$\rightarrow$

Edge enhancement

Erstaunlicherweise ist auch das Umgekehrte möglich: Um Konturen schärfer hervortreten zu lassen ersetzten wir den Wert jedes Pixels durch eine gemittelte Differenz seines eigenen Wertes und der Werte seiner Nachbarn:

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(10p_{ij} - p_{i-1,j} - p_{i-1,j} - p_{i,j-1} - p_{i,j-1} - \\ - p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j-1})$$

und entsprechend am Bildrand und in Ecken. Das Resultat der linearen Abbildung $V \to V, p \mapsto \tilde{p}$, sieht so aus:

$\rightarrow$