

Orthogonalprojektion

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Dann gilt

- ▶ Die Orthogonalprojektion des Vektors x auf den Vektor $y \neq 0$ ist

$$z = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$$

- ▶ $\forall x, y \in V: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- ▶ $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist eine Norm.
- ▶ $x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
(Satz von Pythagoras)

Definition

$x \in V$ heisst Einheitsvektor, falls $\|x\| = 1$.

Satz

In einem VR V seien e_1, \dots, e_k paarweise orthogonale Vektoren und alle verschieden von 0. Dann sind diese Vektoren linear unabhängig.

Korollar

n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem n -dimensionalen VR V bilden eine Basis.

Definiton: Eine solche Basis heisst **Orthonormalbasis** (ONB).

Satz

Seien e_1, \dots, e_n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem VR V . Dann ist

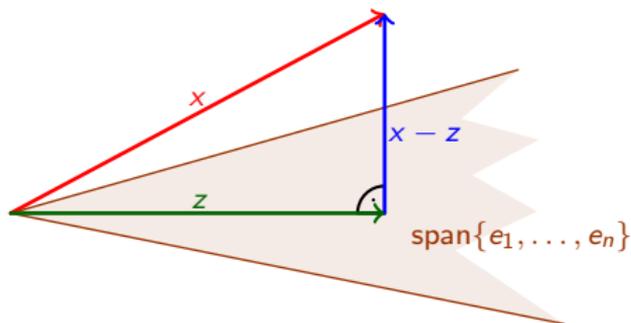
$$z = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

die Orthogonalprojektion von $x \in V$ auf $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

D.h. für alle $v \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ gilt

$$x - z \perp v$$

z realisiert den kleinsten Abstand eines Punktes in $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ von x .



Korollar

Sei e_1, \dots, e_n eine ONB in einem VR V . Dann gilt für jedes $x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Satz

Sei b_1, \dots, b_n eine Basis eines VR V . Dann existiert eine ONB e_1, \dots, e_n so dass für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\text{span}\{b_1, \dots, b_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$$

Die Basis e_1, \dots, e_n lässt sich mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens konstruieren. Dazu setzt man

$$e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

und dann rekursiv für $k > 1$

$$e'_k := b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k, e_i \rangle e_i \quad \text{und} \quad e_k := \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$$

Definition

Sei V ein komplexer VR. Dann heißt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

ein (komplexes) Skalarprodukt, falls gilt

(S1) wie für reelle VR

(S2') $\forall x, y \in V: \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

(S3) wie für reelle VR

Lineare Abbildungen und Matrizen

Ziel: Jede lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen VR durch eine Matrix darstellen.

Situation:

$$V \xrightarrow{\mathcal{F} \text{ linear}} W$$

Basis b_1, \dots, b_n

Basis c_1, \dots, c_m

$$x \longmapsto y := \mathcal{F}(x)$$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$$

$$y = \sum_{i=1}^m y_i c_i$$

Koordinatenvektor
von x bez. \mathcal{B} :

Koordinatenvektor
von y bez. \mathcal{C} :

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$[y]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Frage: Wie hängen $[x]_{\mathcal{B}}$ und $[y]_{\mathcal{C}}$ zusammen?

Beachte: $\mathcal{F}(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i$, d.h. $[\mathcal{F}(b_j)]_c = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Also:

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{i=1}^m y_i c_i = \\
 &= \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{F}(b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) c_i
 \end{aligned}$$

Wir lesen ab:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

- ▶ $[y]_c$ erhält man also durch Multiplikation der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $[x]_B$: Also $[y]_c = A[x]_B$.
- ▶ A hat als Spalten gerade die Koordinatenvektoren $[\mathcal{F}(b_j)]_c$.

Satz

Seien V und W VR mit $\dim V = n$, $\dim W = m$. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $\mathcal{F} : V \rightarrow W$ durch eine $m \times n$ -Matrix darstellen. Dazu wählt man Basen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ in V und $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ in W . Seien

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [y]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren von x und $y = \mathcal{F}(x)$ bezüglich \mathcal{B} respektive \mathcal{C} . Dann gilt

$$[y]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}$$

Hierbei ist

$$A = ([\mathcal{F}(b_1)]_{\mathcal{C}} \dots [\mathcal{F}(b_n)]_{\mathcal{C}})$$

D.h. die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren von $\mathcal{F}(b_j)$ bezüglich \mathcal{C} .