

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

- Eine Folge kann höchstens ein Grenzwert haben.
- Jede monotone und von oben beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch: Die Folge $a_n = -n$ ist monoton und von oben beschränkt, aber sie konvergiert nicht.

- Es gibt konvergente Folgen, die nicht beschränkt sind.

Falsch: Siehe Bemerkung 2.5 im Skript.

- Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch: Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent und beschränkt.

(b) Seien (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen in \mathbb{R} mit $c_n = a_n + b_n$.

- Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Falsch: Sei $a_n = -(-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$. Dann gilt $c_n = 0$ für alle $n \in \{1, 2, \dots\}$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren nicht.

- Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Richtig: Siehe Satz 2.8 im Skript.

- Falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.

Richtig: Sei $A \in \mathbb{R}^+$ eine Schranke von (a_n) und sei B eine Schranke von (b_n) . Dann gilt:

$$|c_n| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq A + B.$$

Das heisst, $A + B$ ist eine Schranke von c_n .

- Falls (c_n) konvergiert, konvergiert mindestens eine der Folgen (a_n) und (b_n) .

Falsch: Die Folgen $a_n = -(-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$ sind wieder ein Gegenbeispiel.

(c) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} .

- Falls $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$

gilt, dann konvergiert (a_n) .

Falsch: Sei $a = 0$, $a_n = (-1)^n$ und $\varepsilon = 2$.

- Falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent.

Richtig: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Dann gilt:

$$|b_n - 2a| = |a_{n+1} + a_n - 2a| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- Falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent.

Falsch: Sei $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dann ist $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$ und wir wissen, dass das konvergiert. Andererseits konvergiert die Summe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ nicht.

- Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \quad \forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

Richtig: Siehe Satz 2.11 (Weierstrass) im Skript.

2.2. Äquivalente Definitionen der Konvergenz. Sei (a_n) eine reelle Folge und sei $L \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Für alle ε ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$ endlich;
(ii) Für alle ε existiert $N_\varepsilon \geq 1$, so dass $|a_n - L| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt.

Lösung.

- [(i) \Rightarrow (ii)] Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $\{n \mid a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}$ endlich und somit gibt es $N \geq 1$, so dass

$$\{n \mid a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\} \subseteq \{1, 2, \dots, N - 1\}$$

Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

- [(ii) \Rightarrow (i)] Klar.

***2.3. Grenzwert I** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Der Binomialsatz könnte nützlich sein.

Lösung. Falls $a > 1$, sei $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Dann $b_n > 0$ und nach Binomische Satz gilt:

$$1 + nb_n \leq (1 + b_n)^n = a,$$

Es gilt also:

$$0 \leq b_n \leq \frac{a - 1}{n}$$

und deshalb haben wir $b_n \rightarrow 0$.

Falls $a = 1$, haben wir $\sqrt[n]{a} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und das Ergebnis folgt sofort.

Falls $0 < a < 1$, definieren wir $c = \frac{1}{a}$. Dann $c > 1$ und es gilt nach dem vorherigen Teil:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}}.$$

Dies impliziert, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2.4. Grenzwert II Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

$$*(a) \quad a_n = \frac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5};$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^{-2} + 5n^{-4}}{10n^{-5} + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 0 + 0}{0 + 2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(b) \quad b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n;$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n\sqrt{1 + 3/n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/n} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(c) \quad c_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n};$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(1 + (-2/3)^n)}{3^n(1 - (2/3)^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-2/3)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n} = \frac{1 + 0}{1 - 0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$(d) \quad d_n = \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n+1}{n^2} + \dots + \frac{3n}{n^2} \right);$$

Lösung. Nach der Formel für die Summe der arithmetischen Progression haben wir:

$$\begin{aligned} n + (n+1) + \dots + 3n &= (1 + 2 + \dots + n + \dots + 3n) - (1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n+1}{n^2} + \dots + \frac{3n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n(3n+1)}{2n^2} - \frac{(n-1)n}{2n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + 3/n}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/n}{2} = 9/2 - 1/2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

***(e)** $e_n = \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n}$.

Lösung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$17^n < 5^n + 11^n + 17^n < 17^n + 17^n + 17^n = 3 \cdot 17^n.$$

Dies impliziert Folgendes:

$$17 = \sqrt[n]{17^n} < \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 17^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 17. \quad (1)$$

Aus Übung 2.3 folgt, dass $\sqrt[n]{3}$ nach 1 konvergiert. Daher konvergieren beide Seiten der Gleichung gegen 17. Nach dem Sandwichsatz, schliessen wir, dass e_n nach 17 konvergiert.

2.5. Divergente Folgen. Finden Sie Beispiele für reelle Folgen (x_n) und (y_n) , so dass $x_n \rightarrow +\infty$, $y_n \rightarrow -\infty$ und

(a) $x_n + y_n \rightarrow +\infty$;

Lösung. Sei $x_n = n^2$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = n^2 - n = n(n - 1) \rightarrow +\infty$.

(b) $x_n + y_n \rightarrow -\infty$;

Lösung. Sei $x_n = n$ und $y_n = -n^2$. Dann gilt: $x_n + y_n = n - n^2 = -n(n - 1) \rightarrow -\infty$.

(c) $(x_n + y_n)$ konvergiert;

Lösung. Sei $x_n = n$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = n - n = 0 \rightarrow 0$.

(d) $(x_n + y_n)$ beschränkt ist und divergiert.

Lösung. Sei $x_n = (-1)^n + n$ und $y_n = -n$. Dann gilt: $x_n + y_n = (-1)^n + n - n = (-1)^n$.