

3.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei a_n definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{k}{12k+1}} & n = 3k + 1 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1} & n = 3k + 2 \text{ für } k \geq 0, \\ \frac{(-1)^k}{k} & n = 3k + 3 \text{ für } k \geq 0. \end{cases}$$

Welche der Aussagen gilt?

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.
Falsch. Die Teilfolge $(a_{3k+1})_k$ konvergiert gegen $1 + \sqrt{1/12}$, die Teilfolge $(a_{3k+2})_k$ gegen 5 und die Teilfolge $(a_{3k})_k$ gegen 0. Es folgt, dass $(a_n)_n$ nicht konvergiert.
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.
Richtig. Die Folge $(a_n)_n$ hat untere Schranke -1 . Also existiert der Limes inferior von $(a_n)_n$.
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{1/12}$
Falsch. Wie oben bemerkt, ist $\{1 + \sqrt{1/12}, 5, 0\}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_n$. Der grösste Häufungspunkt 5 ist der Limes superior.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Sei $(q_n)_{n \geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann ist $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Falsch: Sei $q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |\frac{1}{n+1}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, aber $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = a_{\sigma(n)}$, $\forall n \geq 1$.
Richtig. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$. Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : |\alpha - a_n| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Wir definieren $m_\varepsilon = \max(\{k : \sigma(k) \leq n_\varepsilon\})$. Es ist $m_\varepsilon < \infty$, weil $n_\varepsilon < \infty$ und σ eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_\varepsilon$.
Somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$.

(c) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Dann

- konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$;
Falsch. Zum Beispiel ist $x_n = 1/n^2$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.
- kann $(x_n)_n$ unbeschränkt sein;
Falsch. Jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.
- gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m, n > N$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Richtig. Das ist die Definition einer Cauchy-Folge.

***3.2. Grenzwert.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+4}$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-19)^n - \pi}{13^n + 1}$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2022)^n + (-2023)^n}{(-2022)^{n+1} - (-2023)^n}$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

Lösung.

(a) **Behauptung:** Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+4} = 1$

Beweis: Wir haben die folgende Ungleichungen

$$b_n := \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{3n+4} \leq c_n := \sqrt[n]{8n}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $b_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Wir zeigen nun, dass auch c_n gegen 1 konvergiert, dies zeigt dann, dass auch die ursprüngliche Folge gegen 1 konvergiert.

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(b) Es gilt

$$\frac{(-19)^n - \pi}{13^n + 1} = \left(-\frac{19}{13}\right)^n \cdot \frac{1 - \pi \cdot (-19)^{-n}}{1 - 13^{-n}}$$

Während der zweite Bruch gegen 1 konvergiert, hat der Faktor $\left(-\frac{19}{13}\right)^n$ ein alternierendes Vorzeichen und der Betrag geht gegen unendlich. Damit divergiert die Folge, der Limes existiert nicht.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2022)^n + (-2023)^n}{(-2022)^{n+1} - (-2023)^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2022/2023)^n + (-1)^n}{(-2022/2023)^n \cdot 2022 + (-1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

(d) Wir können der n -ten Term der Folge als

$$\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

schreiben und wir wissen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = e,$$

weil $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ und $n \mapsto (1 + 1/n^3)^{n^3}$ eine Teilfolge von $n \mapsto (1 + 1/n)^n$ ist.

Wir haben deshalb für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \leq M,$$

wobei $M \in \mathbb{R}$ eine Schranke von $(1 + 1/n^3)^{n^3}$ ist. Da $x \leq y \implies \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$, gilt auch:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} \leq \sqrt[n]{M}$$

Nach Übung 2.3 wissen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1$ und nach Sandwichsatz schliessen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = 1.$$

***3.3. Fibonacci.** Die reelle Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Lösung: Es sei $\Phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\Psi := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Zu beweisen ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n = 1$ und $n = 2$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n + 1$ auf $n + 2$.

Verankerung. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right) = 1 = a_1, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{4\sqrt{5}}{4} \right) = 1 = a_2. \end{aligned}$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \geq 1$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n), \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n + 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}) \quad (\text{Induktionsannahme}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n(1 + \Phi) - \Psi^n(1 + \Psi)). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1 + \Phi) = \Phi^2$ und $(1 + \Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi + 1, \\ \Psi^2 &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \Psi + 1. \end{aligned}$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung. Aus der expliziten Formel bewiesen in der vorherigen Aufgabe folgt, dass für jedes $m \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| &= \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi \right| = \left| \frac{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} - \Phi \right| \\ &= \left| \frac{\Phi\Psi^m - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} \right| = \left| \frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1} \right| \leq \frac{\sqrt{5}}{\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m - 1}, \end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\left|\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1\right| \geq \left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| < \varepsilon &\Leftrightarrow \sqrt{5} < \varepsilon \left(\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m - 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1 < \left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m \\ &\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1\right) < m \log\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right| \\ &\Leftrightarrow m > \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1\right)}{\log\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|} =: N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \geq 1$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n : \left| b_m - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq \frac{1}{100}.$$

Lösung: Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\log\left(100\sqrt{5} + 1\right)}{\log\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|} = \frac{\log\left(100\sqrt{5} + 1\right)}{\log\left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right|} \approx 5.625746.$$

Es folgt $n\left(\frac{1}{100}\right) = 6$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m \geq 6$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

3.4. Bernoulli Ungleichung. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei $x > -1$, Folgendes gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Lösung.

Wir beweisen das mit Induktion.

- Sei $n = 0$. Dann $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0x$.
- Wir nehmen an, dass $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ gilt. Dann gilt auch

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.