Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

4.1. MC Fragen.

(a) Sei $X_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ und $Y_n = [n, +\infty)$ für $n \geq 1$. Welche Aussagen sind richtig?

☑ $X_n \supseteq X_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$;

☐ $\bigcap_{n\geq 1} X_n \neq \emptyset$;

Falsch. Für jedes $x \in (0,1]$ können wir nach dem Satz von Archimedes ein $m \in \mathbb{N}$ so finden, dass $x > \frac{1}{m}$. Deshalb gilt $x \notin (0, \frac{1}{m}]$ und $\bigcap_{n\geq 1} X_n = \emptyset$.

☐ $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$;

Falsch. Stattdessen haben wir $Y_n \supseteq Y_{n+1}$.

☑ $\bigcap_{n\geq 1} Y_n = \emptyset$.

Richtig. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ können wir nach dem Satz von Archimedes ein $m \in \mathbb{N}$ so finden, dass $x < m$. Deshalb gilt $x \notin [m, \infty)$ und $\bigcap_{n\geq 1} X_n = \emptyset$.

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Welche Aussagen sind richtig?

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

☑ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (S_m) der Partialsummen $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergiert.

☐ Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe ist, wobei $0 \leq b_n \leq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Falsch. Zum Beispiel, sei $b_n = \frac{1}{2^n}$ und $a_n = 1$. Dann gilt $0 \leq b_n \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

konvergiert aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+(-1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{4}\Big)+...$$

konvergiert nicht.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+(-1)+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{3}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{4}\Big)+...$$

konvergiert aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$$

konvergiert nicht.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Falsch. Gegenbeispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$$

ist absolut konvergent aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...$$

ist nicht konvergent.

☑ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Richtig. Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergenten Reihe ist auch absolut konvergent.

***4.2. Limit-Vergleichssatz** Sei (a_n) und (b_n) zwei Folgen, wobei $a_n, b_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es existiert eine reelle Zahl $l > 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $N > 0$, wobei $\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$ für jedes $n > N$, gibt.

Lösung. $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$ bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ gibt, so dass $|a_n/b_n - l| < \varepsilon$, falls $n > N$. Entsprechend haben wir

$$\begin{aligned} n > N &\iff -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \varepsilon \\ &\iff l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \\ &\iff (l-\varepsilon)b_n < a_n < (l+\varepsilon)b_n. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes ε. Wir können deshalb auch ein N finden, so dass es für $\varepsilon = \frac{l}{2}$ gilt. Das zeigt, dass die vorausgesetzte Ungleichung gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Lösung. Sei $N \in \mathbb{N}$ die kleineste natürliche Zahl, so dass die Ungleichung

$$\frac{l}{2}b_n < a_n < \frac{3l}{2}b_n$$

für jedes $n > N$ gilt.

Falls $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergiert, konvergiert gemäss der oben genannten Ungleichung und dem Vergleichssatz auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$. Ähnlich, falls $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ konvergiert, konvergiert gemäss der oben genannten Ungleichung und dem Vergleichssatz auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Da die Konvergenz einer Reihe nicht von ihren ersten N Termen abhängt, ist damit der Beweis abgeschlossen.

(c) Das Obenstehende gilt nicht, wenn $a_n/b_n \to 0$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

Lösung. Ein Beispiel wäre

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

***4.3. Reihe I.** Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen. Wenn die Reihe konvergiert, berechnen Sie den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n+1)}$,

Lösung. Wir verwenden die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}.$$

Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} &= \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{3-1} + \frac{1/2}{3+1} \\ &+ \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{4-1} + \frac{1/2}{4+1} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{-1}{N-1} + \frac{1/2}{N-1-1} + \frac{1/2}{N-1+1} \\ &+ \frac{-1}{N} + \frac{1/2}{N-1} + \frac{1/2}{N+1}.\end{aligned}$$

Alle bis auf 6 Terme heben sich auf und wir erhalten:

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{N} + \frac{-1}{N} + \frac{1/2}{N+1}.$$

Für $N \to \infty$ haben wir:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} = \frac{1}{12}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{n-2}}{3^n}$,

Lösung. Wir haben:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{n-2}}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{2^2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 2,$$

wo wir die Formel für die geometrische Reihe in der zweiletzten Gleichung angewendet haben.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+2}$.

Lösung. Für $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{3}{2n+2} \geq \frac{3}{2n+n} = \frac{3}{3n} = \frac{1}{n}.$$

Konvergenz hängt nicht von den ersten zwei Termen ab. Die harmonische Reihe divergiert und deshalb divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+2}$ gemäss dem Vergleichssatz.

4.4. Reihe II. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergent, mit $a_k \geq 0, \forall k \geq 1$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

konvergiert.

Lösung.

Da sämtliche a_k positiv sind, können wir die Wurzel nehmen. Wir beobachten

$$0 \leq \left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right)^2 = a_k - 2\sqrt{a_k a_{k+1}} + a_{k+1}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}.$$

Mit dieser Ungleichung können wir die Partialsummen von oben abschätzen:

$$\begin{aligned} S_n := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} &\leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{a_1}{2} + \sum_{k=2}^{n} a_k + \frac{a_{n+1}}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k =: T_{n+1} \end{aligned}$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ist äquivalent zur Beschränktheit (von oben) der Partialsummen T_n, siehe Satz 2.42. Per Annahme (Konvergenz der Reihe) sind also die T_n's von oben beschränkt. Insbesondere zeigt die Ungleichung oben, dass auch die Partialsummen S_n von oben beschränkt sind, und somit impliziert Satz 2.42, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ konvergiert.