Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☑ $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$.
- ☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

Lösung.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{1-1/n} &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{-1/n} \\ &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\end{aligned}$$

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.
- ☑ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☑ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Lösung. (a_k) und (b_k) sind beschränkt. Dann $\exists\ C > 0$, $|a_k| + |b_k| < C$ und

$$|a_k|^2 < C|a_k|, \quad |a_k b_k| < C|a_k|.$$

(c) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☑ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Lösung.

- $a_k = b_k = 1$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ divergiert.
- $a_k = b_k = 1/n$, dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert absolut.
- $a_k = 1/n$, $b_k = (-1)^k$ dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

5.2. Wurzelkriterium „starker" als Quotientkriterium. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Lösung. Die zweite Ungleichung folgt aus der Definition von lim sup und lim inf. Wir zeigen die dritte Ungleichung; der Beweis der ersten Ungleichung ist ähnlich.

Sei

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Falls $\alpha = +\infty$, gibt es nichts zu beweisen. Falls α endlich ist, wähle $\beta > \alpha$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \beta$$

für $n \geq N$.

Nach Multiplikation k solcher aufeinanderfolgender Terme erhalten wir:

$$\left|\frac{a_{N+k}}{a_N}\right| = \left|\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{N+k-1}}{a_{N+k-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \leq \beta^k.$$

Das heisst,

$$|a_n| \leq |a_N|\beta^{-N} \cdot \beta^n \qquad (n \geq N+1).$$

Deshalb gilt es

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_N|\beta^{-N}} \cdot \beta,$$

so dass, nach Übung 2.3, wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \tag{1}$$

erhalten. Gleichung (1) gilt für jedes $\beta > \alpha$, und deshalb gilt auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha.$$

***5.3. Reihen I** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$

Lösung. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n} &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(n+2)-(n+1)}{n(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1})}. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ implizieren, dass

$$|a_n| = \frac{1}{n(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} < \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$$

gilt. Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ für jede $p > 1$ konvergiert und nach Vergleichssatz, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!\sin(n^{17})}{(3n)!}$

Lösung. Wir beachten, dass $|\sin(x)| \leq 1$ für jede $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left|\frac{n!(2n)!\sin(n^{17})}{(3n)!}\right| \leq \frac{n!(2n)!}{(3n)!}.$$

Nach Vergleichssatz konvergiert die Reihe falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!} < \infty.$$

Sei

$$a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!(2(n+1))!/(3(n+1))!}{n!(2n)!/(3n)!} = \frac{(n+1)n!(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!n!(2n)!} \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)(2n)!(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(2n)!} \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{4n^3+10n^2+8n+2}{27n^3+54n^2+33n+6}
\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4}{27} < 1.$$

Nach Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2^n}{3^n}$

Lösung. Sei $a_n = (5n+2^n)/3^n$. Dann

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(5(n+1)+2^{n+1})/3^{n+1}}{(5n+2^n)/3^n} = \frac{(5(n+1)+2^{n+1})3^n}{(5n+2^n)3^{n+1}} = \frac{\frac{5(n+1)}{2^n}+2}{\left(\frac{5n}{2^n}+1\right)\cdot 3}.$$

Wir wissen, dass $\frac{n}{2^n} \to 0$.(Siehe: Notizen 7.7.2022, seite 2) Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 0$$

und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2^n} = 0.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{3}$$

und nach Quotientenkriterium konvergiert die Reihe.

***5.4. Reihen II** Finden Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n.$$

Lösung. Sei $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\frac{((n+1)!)^3|x|^{n+1}}{(3(n+1))!)}}{\frac{(n!)^3|x|^n}{(3n)!}} = \frac{((n+1)!)^3|x|^{n+1}(3n)!}{(3(n+1))!(n!)^3|x|^n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \frac{(3n)!}{(3n+3)}|x| \\ &= \frac{(n+1)^3(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}|x| = \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}|x|\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{27}.$$

Nach Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, falls $|x|/27 < 1$. Das heisst, der Konvergenzradius ist $\rho = 27$.