Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

6.1. MC Fragen: Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Kreuze die richtigen Aussagen an.

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

☐ $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f(x) = g(x) = x$ mit $D = \mathbb{R}$.

☐ Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monton wachsend.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $D = (0, +\infty)$, $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$, da dann $\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x}$ nicht *monoton wachsend ist.*

☐ Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.

Falsch. Sei $D = (0, +\infty)$ und definiere

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ x^2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Dann sind weder $\frac{f}{g}$ noch $\frac{g}{f}$ monoton:

$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

und

$$\frac{g}{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

(b) Kreuze die richtigen Aussagen an. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetige bei $x_0 = 0$ ist mit $f(x_0) > 0$.

☑ Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$ so dass $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt.

Richtig. Sei $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$*. Dann gibt es wegen Stetigkeit bei* x_0 *ein* $\delta > 0$ *so dass für alle* $x \in (-\delta, \delta)$ *gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

Insbesondere gilt

$$-f(x) + f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

was $f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon$ *impliziert.*

☐ Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = -x^2 + 1$.

☐ Beide obige Aussagen sind falsch.

Falsch.

(c) Kreuze die richtigen Aussagen an.

☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.

Falsch. Die Funktion $f(x) = |x-1|$ *ist zwar beschränkt, aber nicht monoton.*

☐ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies$ f stetig.

Falsch. Die Funktion kann trotzdem einen unstetigen "Sprung" haben:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x+1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

☐ $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Falsch. Der Logarithmus $\ln\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ *ist monton, aber nicht beschränkt.*

☑ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Richting. Angenommen f *is monoton fallend (der Fall "steigend" ist analog). Dann gilt* $f(1) \leq f(y) \leq f(0)$ *für alle* $y \in [0,1]$*, das heisst*

$$f(y) \in [f(1), f(0)], \quad \forall y \in [0,1],$$

was Beschränkheit von f *zeigt.*

(d) Die Aufrundungsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ ist im Punkt $x = 2$

☐ stetig.

Falsch. Sei $\varepsilon = 1/2$. Dann $\nexists\ \delta > 0$ mit $|\lceil x \rceil - 2| < 1/2$ für jedes $x \in (2-\delta, 2+\delta)$.

☑ unstetig.

Richtig. Siehe oben.

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

***6.2. Cauchy Produkt.** Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ wobei $|x| < 1$ Folgendes gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Lösung. Falls $|x| < 1$, wissen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut konvergiert.

Nach Satz 2.62. gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.\end{aligned}$$

***6.3. Stetigkeit I.** Zeigen Sie direkt aus der ε-δ Definition, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x$$

in jedem Punkt stetig ist.

Lösung. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wollen ein $\delta > 0$ finden, so dass für jedes $y \in (x-\delta, x+\delta)$

$$|e^x - e^y| < \varepsilon \tag{1}$$

gilt.

Nehmen wir an, dass $|y-x|<1$ gilt. Beachten Sie Folgendes:

$$\begin{aligned}|e^x-e^y| &= e^x\left|1-e^{y-x}\right| = e^x\left|1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x)^n}{n!}\right| = e^x\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(y-x)^n}{n!}\right|\\ &= e^x\cdot|y-x|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(y-x)^n}{n!}\right| \overset{(\clubsuit)}{\leq} e^x\cdot|y-x|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right| \overset{(\spadesuit)}{\leq} e^x\cdot|y-x|\cdot\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right|\\ &= 2e^x|y-x|,\end{aligned}$$

wobei ($\clubsuit$) nach die Annahme $|y-x|<1$ gilt und ($\spadesuit$) aus $n!\geq 2^{n-1}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ folgt.

Wir sehen nun, dass falls

$$2e^x|y-x|<\varepsilon$$

gilt, gilt auch die Gleichung (1).

Deshalb wählen wir

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2e^x}\right\}.$$

6.4. Stetigkeit II. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

nur in $x=0$ stetig ist.

Lösung.

Zuerst zeigen wir, dass f in $x=0$ stetig ist. Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wir nehmen $\delta=\varepsilon$. Dann für jedes $x\in(-\delta,+\delta)$ gilt es

$$|f(x)-f(0)| = |f(x)-0| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Deshalb ist f in $x=0$ stetig.

Jetzt zeigen wir, dass in alle andere Punkten $x\neq 0$ die Funktion f nicht stetig ist. Nach Satz 3.7 genügt es eine Folge (a_n) zu finden, die nach x konvergiert und für welche $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\neq f(x)$.

Nehmen wir zuerst an, dass $x \neq 0$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt. Dann ist $f(x) = 0$. Sei (a_n) eine Folge rationalen Zahlen, so dass $x \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert a_n nach x und $f(a_n) = a_n$. Deshalb ist

$$f(x) = 0 \neq x = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Nehmen wir nun an, dass $x \neq 0$ in Q liegt. Dann ist $f(x) = x$. Sei (b_n) eine Folge irrationalen Zahlen, so dass $x \leq b_n \leq x + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert b_n nach x und $f(b_n) = 0$. Deshalb ist

$$f(x) = x \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.