Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

7.1. MC Fragen.

(a) Wählen Sie alle Funktionen, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig sind.

☑ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{(4x-6)^{12} + x^4}{x^2+1};$

Sowohl der Zähler als auch der Nenner sind stetig und der Nenner ist niemals Null. Nach Korollar 3.8 ist auch f stetig.

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{x};$

Auf $x = 0$ ist f nicht wohldefiniert. Deshalb kann sie auf $x = 0$ auch nicht stetig sein.

☑ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|;$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $\delta = \varepsilon$. Dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon,$$

wobei die letzte Ungleichung nach die Umgekehrte Dreiecksungleichung folgt. Dies ist die Definition von Stetigkeit und deshalb ist f stetig.

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{sign}(x)$, wobei

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Für $x_0 = 0$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt für jede $\delta > 0$ und $x \neq x_0$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon.$$

Deshalb ist f in $x_0 = 0$ nicht stetig.

☑ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x| \cdot \operatorname{sign}(x).$

Da $|x| \cdot \operatorname{sign}(x) = x$ und $g(x) = x$ stetig ist, ist auch f stetig.

(b) Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

☑ Falls I kompakt ist, ist auch $f(I)$ kompakt.

Richtig. Siehe Satz 3.19.

☐ Falls I kompakt ist, ist $f(I)$ nicht unbedingt kompakt.

Falsch: Siehe Satz 3.19.

☐ Falls $f(I)$ kompakt ist, ist auch I kompakt.

Falsch: Sei $I = (-\pi, \pi)$ und $f(x) = \sin(x)$. Dann ist $f(I) = [-1, 1]$ kompakt, aber $(-\pi, \pi)$ ist nicht kompakt.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? In allen Fällen seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Falsch. Ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Aussage liefert die Einschränkung von sin *auf das Intervall $[0, 3\pi]$.*

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.

Falsch. Die konstante Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, ist ein Gegenbeispiel.

☑ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.

Richtig. Der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Nullstelle, und aufgrund der strengen Monotonie kann es höchstens eine geben.

***7.2. Umkehrfunktion.** Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

(a) $f(x) = 4 \cdot \ln(x + 7) + 3$ für $x \in (-7, +\infty)$,

Lösung. Strikte Monotonie von f folgt sofort aus der strikten Montonie von ln. Nach Satz 3.22 ist f somit invertierbar. Wir berechnen die Inverse g indem wir im Ausdruck $y = 4 \cdot \ln(x + 7) + 3$ das x freistellen:

$$\exp(y) = (x+7)^4 \cdot \exp(3) \implies x = \sqrt[4]{\exp(-3) \cdot \exp(y)} - 7 = \exp\left(\frac{y-3}{4}\right) - 7.$$

Also ist

$$g(y) = \exp\left(\frac{y-3}{4}\right) - 7$$

die Inverse von f

(b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$,

Lösung. Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist strikt monoton steigend und $x \mapsto e^{-x}$ ist strikt monoton fallend. Insbesondere ist $x \mapsto -e^{-x}$ strikt monton steigend, was zeigt, dass f strikt monoton steigend ist. Also ist f nach Satz 3.22 widerrum invertierbar. Um die Inverse zu finden brauchen wir ein paar Tricks: Wir wollen $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auflösen, was aber direkt nicht geht. Wir definieren $z = e^x$ und beobachten, dass

$$z^2 - 2yz - 1 = e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2} - 1 = 0.$$

Falls wir diese quadratische Gleichung in z lösen können, haben wir gewonnen, da wir dann durch anwenden von ln auf $z = e^x$ das gewünschte x erhalten. Wir berechnen:

$$z_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}, \; z_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Aber $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = y$, da $y > 0$, was $z_2 < 0$ impliziert. Aber $e^{x_2} < 0$ hat keine reellen Lösungen, also betrachten wir nur $z_1 = e^{x_1}$ und nehmen den Logarithmus:

$$x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Insbesondere ist $g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ die gesuchte Inverse.

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Die Funktion erfüllt $f(-x) = f(x)$ und ist somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Insbesondere, kann f nicht injektiv sein (e.g. $f(2) = f(-2)$ aber $2 \neq -2$) und somit ist f nicht invertierbar. Ausserdem ist f ist nicht strikt monoton - dies folgt auch aus der Symmetrie.

7.3. Zwischenwertsatz II. Beweisen Sie, dass am Äquator der Erde es immer zwei gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur gibt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Temperatur durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann, und betrachten Sie die Temperaturdifferenz zwischen Antipodenpunkten auf einem Grosskreis.

Lösung. Nach der Hinweis nehmen wir an, dass die Temperatur durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann und wir schreiben

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

für die Temperatur auf einem Grosskreis. Da das ein Kreis ist, muss $f(x) = f(x + 2\pi)$ gelten.

Sei $g(x) = f(x) - f(\pi + x)$. Hier x und $\pi + x$ sind zwei gegenüberliegende Punkte. Falls $g(0) = 0$, ist $f(0) = f(\pi)$ und wir sind fertig.

Falls $g(0) = f(0) - f(\pi) > 0$, da $g(\pi) = f(\pi) - f(0) = -(f(0) - f(\pi)) = -g(0)$, gilt $g(\pi) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $x_0 \in (0, \pi)$ gibt, so dass $g(x_0) = 0$. Deshalb gilt $f(x_0) = f(\pi + x_0)$.

Das Argument ist ähnlich im Fall, wenn $g(0) = f(0) - f(\pi) < 0$.

***7.4. Surjektivität von x^n.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto x^n$$

surjektiv ist.

Lösung.

Sei $y \in [0, \infty)$. Um zu zeigen, dass f surjektiv ist, müssen wir zeigen, dass ein $x \in [0, \infty)$ existiert, so dass $x^n = y$. Wir wissen, dass $0 \leq y$. Da

$$y^n - y = (y - 1)(y^{n-1} + \cdots + y + 1),$$

gilt es $y^n \geq y$ für $y \geq 1$. Sei $I \coloneqq [0, \max\{1, y^n\}]$. Da $y \in I$, gibt es nach Zwischenwertsatz ein $x \in I \subset [0, \infty)$, so dass $f(x) = x^n = y$.