Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

8.1. MC Fragen.

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetigen Funktionen. Wählen Sie die richtige Aussagen.

☑ Falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, konvergiert f_n nach f punktweise.

Richtig: Sei f_n eine gleichmässig konvergente Folge. Dann

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \textit{so dass} \quad n > N \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Insbesondere für jedes feste $x \in D$ gilt $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad$ so dass $\quad n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, was die Definition von punktweiser Konvergenz ist.

☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für $c_n \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in D$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.

Falsch. Sei $f_n(x) = (-1)^n$. Dann gilt für $c_n = 1$ die Ungleichung $f_n(x) \leq c_n$, aber f konvergiert nicht.

☑ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für jedes $x \in D$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.

Richtig. Nach Satz 3.38 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig. Insbesondere, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ auch punktweise.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Telmenge. Der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von D, falls

☐ $x_0 \in D$;

Falsch: Siehe Definition 3.47 im Skript.

☑ für jedes $\delta > 0$ gilt es $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$;

Richtig: Siehe Definition 3.47 im Skript.

☐ für jedes $\delta > 0$ gilt es $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \neq \emptyset$.

Falsch: Siehe Definition 3.47 im Skript.

(c) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

☑ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Richtig: Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x^{1/2}+n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty}(x^{1/2}+n^{-1}))^2 = (x^{1/2})^2 = x$.

☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch: Aus $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2$ *folgt, dass für* $x > n^2$ *auch* $|f_n(x)-x| > 2$ *ist. Also kann* (f_n) *nicht gleichmässig konvergiern.*

☑ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0,M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig: Es gilt $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2 \leq 2M^{1/2}/n + 1/n^2$ *für alle* $x \in [0,M]$. *Da* $2M^{1/2}/n + 1/n^2 \to 0$ *folgt es, dass* $(f_n|_{[0,M]})$ *gleichmässig konvergiert.*

***8.2. Konvergenz von Funktionenfolgen.** Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f? Falls ja, bestimmen Sie f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N};$

Lösung. Für alle $x \in [0,1]$ gilt für $f(x) = 1$

$$\begin{aligned}\Big|f(x)-f_n(x)\Big| &= \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 - 1\right| = \left|1+2\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}-1\right| \\ &= 2\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

(b) $f_n(x) := \frac{\sin x}{n};$

Lösung. Für $f(x) = 0$ gilt es

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(c) $f_n(x) \coloneqq 1 + x^n(1-x)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

Lösung. Wir zeigen, dass f_n nach $f(x) \coloneqq 1$ gleichmässig konvergiert. Es gilt:

$$0 \leq x(1-x) \leq \tfrac{1}{4} \qquad \forall x \in [0,1].$$

Denn die erste Ungleichung gilt offensichtlich und ausserdem ist

$$x(1-x) = -x^2 + x = -(x-1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $|x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$ für $x \in [0,1]$ und

$$|f_n(x) - f(x)| = |(x(1-x))^n| = |x(1-x)|^n \leq (1/4)^n.$$

Somit gilt

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq (1/4)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

und die Folge konvergiert gleichmssig gegen f.

***8.3. Gleichmässigkonvergenz.** $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ sei beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und f_n konvergiere gleichmässig gegen f auf D. Dann zeigen Sie, dass $f \colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Lösung. Nimmt man $\varepsilon = 1$ in der Definition der gleichmässigen Konvergenz, so ergibt sich, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in D$.

Nun wählen Sie irgendein $n > N$. Da f_n beschränkt ist, gibt es eine Konstante M, so dass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in D$. Daraus folgt, dass

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M.$$

d.h. f ist beschränkt.

8.4. Trigonometrische Funktion.

(a) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

Lösung.

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y =& \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\ =& \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ &- \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ =& 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

$\cos x - \cos y$ ist ähnlich.

(b) Zeige dass $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ eine strong monoton stetige bijektive Abbildung ist.

Lösung. Wir haben (aus Zusammenfassungen der Vorlesung)

a) $\forall x \in (0,\pi), \sin x > 0$

b) $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \sin 0 = \sin\pi = 0$

Dann

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow \cos x > 0 \text{ wenn } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Da $\cos x$ eine grade Abbildung ist, gilt $\cos x > 0\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wir wissen auch, dass $\cos 0 = 1, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ gilt.

Streng monoton: $\forall -\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$$

Stetig: Satz 3.41 in Skript.

Bijektiv:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin \text{ ist stetig und strong monoton auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\Longrightarrow \sin \text{ ist bijektiv (Zwischenwertsatz)}$$

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}$$

Lösung. Notieren dass, die Reihe $\cos x$ konvergiert. Folgendes gilt:

$$\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}\right] = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!}.$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}
& \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0 \\
\iff & \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} \geq \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \\
\iff & \frac{1}{[4(k+l)]!} \geq \frac{x^2}{[4(k+l)+2]!} \qquad (\text{da } x^{4(k+l)} \geq 0) \\
\iff & 1 \geq \frac{x^2}{(4(k+l)+1)(4(k+l)+2)} \\
\iff & x^2 \leq (4(k+l)+1)(4(k+l)+2),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung nach Annahme gilt.

Dann

$$0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)} \implies \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0 \quad \forall l \geq 1.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.