Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

9.1. MC Fragen.

(a) Sei $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Wählen Sie die richtige Antwort.

☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

☑ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert nicht

Lösung: Da cos *stetig ist, gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1.$$

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und nehmen Sie an, dass es $m \in \mathbb{R}$ und $r\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion gibt, so dass $r(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0),$$

wobei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D ist. Ist f in x_0 differenzierbar?

☑ Ja

☐ Nein

☐ Nicht genügend Informationen, um festzustellen.

Lösung: Nach Satz 4.3 (Weierstrass) im Skript ist f in x_0 differenzierbar.

(c) Definiere für $x > 0$

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\}\Big)^k.$$

Dann

☐ f ist stetig und differenzierbar

☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig

☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar

☑ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

Lösung: Da $f(x) = 0$ falls $x \neq 1$ und $f(1) = 1$ ist f weder stetig noch differenzierbar.

***9.2. Link- und Rechtseitige Grenzwert.** Bestimmen Sie die Link- und die Rechtseitige Grenzwerte von

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot \cos^2(x)$$

in $x = 0$. Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$? Falls ja, bestimmen Sie diese Wert. Falls nein, erklären Sie warum. Ist f eine stetige Funktion?

Lösung. Da $\operatorname{sign}(x) = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sign}(x) = -1$ für $x < 0$ sind die Link- und Rechtseitige Grenzwerte:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \cos^2(x) = 1, \\ &\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(-\cos^2(x)\right) = -1. \end{aligned}$$

Da $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$, existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht. Es folgt, dass f auch nicht stetig ist.

***9.3. Ableitung I.** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\tan(x))$.

Lösung. Falls $x \neq 0$, gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{2}{\sin(2x)}. \end{aligned}$$

(b) $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) := x^{x^a}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl ist.

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, x^{x^a} als $x^{x^a} = e^{\ln x^{x^a}}$ zu schreiben.

Lösung. Wir schreiben

$$f(x) = x^{x^a} = e^{\ln(x^{x^a})} = e^{x^a \ln x}.$$

Dann mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} e^{x^a \ln x} = e^{x^a \ln x} \cdot \left(a x^{a-1} \ln x + x^a \frac{1}{x} \right) = e^{x^a \ln x} \cdot (a \ln x + 1) x^{a-1} \\ &= x^{x^a + a - 1} \cdot (a \ln x + 1). \end{aligned}$$

9.4. Ableitung II.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in R$ differenzierbar ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Berechne

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h}.$$

Lösung. Wir berechnen zuerst, für $k \geq 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{kh} = k \cdot f'(x_0).$$

Für $k = 0$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} = 0 = 0 \cdot f'(x_0)$$

Damit erhalten wir, für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h} \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 + (n-2)h) - f(x_0)}{h} \right) \\ &\quad = n \cdot f'(x_0) - (n-2) \cdot f'(x_0) \\ &\quad = 2 \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade* (resp. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass gilt:

(i) f gerade $\implies$ f' ungerade.

Lösung. Es ist zu zeigen, dass $f'(-x) = -f'(x)$. Dies folgt aus der Definition der Ableitung und der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h' \to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{-h'} \\ &= -\lim_{h' \to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'} \\ &= -f'(x). \end{aligned}$$

(ii) f ungerade $\implies$ f' gerade.

Lösung. der Beweis ist analog zum vorigen Teil.