Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

10.1. MC Fragen.

(a) Kreuze die richtigen Aussagen an

☑ Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, dann ist die zugehörige Ableitung konstant.

Richtig: Falls der Graph von f eine Gerade ist, dann hat f die Form $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ konstant sind. Deshalb gilt $f'(x) = a$, was eine Konstante ist.

☑ Ist eine Funktion f das Doppelte einer Funktion g, dann ist auch die Ableitung von f das Doppelte der Ableitung von g.

Richtig.

☐ Ist $f(0) < 0$, dann gilt auch $f'(0) < 0$.

Falsch: Sei $f(x) = x - 1$. Dann ist $f(0) = -1 < 0$ und $f'(x) = 1 > 0$.

(b) Seien $a < b$ relle Zahlen, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(a) < f(b)$. Welche Aussagen treffen zu?

☐ Falls es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$, ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = c$, so folgt, dass f stetig ist.

Falsch: Sei $a = -1$, $b = 1$ und

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ -x-1, & x \in [-1,0) \end{cases}.$$

Dann f gibt es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$, ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$, aber f ist unstetig.

☐ Falls $g \circ f$ und g differenzierbar sind, so folgt, dass f differenzierbar ist.

Falsch: Sei $g(x) = 0, x \in [-1, 1]$. Dann sind $g \circ f$ und g immer differenzierbar, aber zum Beispiel f aus die erste Aussage oben ist nicht differenzierbar.

☑ Falls f differenzierbar ist, gibt es $x_0 \in [a, b]$ so, dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Richtig: Siehe Satz 4.17.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ so dass

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to\infty} h(x) = 0.$$

Kreuzen Sie die Richtige Aussagen an.

☑ $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = 0$ ist möglich.

Richtig: zum Beispiel $f(x) := -x$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = +\infty$ ist möglich.

Falsch. Da es ein y *gibt, so dass für alle* $x \geq y$ *gilt* $f(x) \leq -1$ *und* $h(x) \geq 0$. *Dies impliziert* $h(x) \cdot f(x) \leq 0$ *für alle* x *gross genug.*

☐ $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = -\infty$ ist nicht möglich.

Falsch. Zum Beispiel für $f(x) := -x^2$ *und* $h(x) = \frac{1}{x}$ *gilt* $\lim_{x\to\infty} h(x) \cdot f(x) = -\infty$.

☑ $\lim_{x\to-\infty} h(x) \cdot f(x) = +\infty$ ist möglich.

Richtig. Man beachte, dass der Limes nun über $x \to -\infty$ *läuft. Für* $x \leq 0$ *haben wir keine Bedingungen an* f, h *gestellt, deshalb ist es sicherlich möglich* f *und* h *so zu wählen, dass deren Produkt gegen* $+\infty$ *strebt für* $x \to -\infty$.

*10.2. Ableitung I.

Zeige:

(a)

$$\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

ist streng monton wachsend.

Lösung. Es genügt zu zeigen, dass $\tan'(x) > 0$ für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mit der Produkt- und Kettenregel berechnen wir:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} + \sin(x) \cdot \left(-\frac{1}{\cos(x)^2} \cdot (-\sin(x))\right) \\ &= 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} > 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty.$$

Lösung. Wir haben $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ und $\cos(x) > 0$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty.$$

Der zweite Grenzwert folgt aus einer ähnlichen Überlegung mit $\cos(x) > 0$ für $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$.

(c) Schliesse, dass $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Die inverse wird arctan gennant.

Lösung. Surjektivität folgt aus b) und dem Zwischenwertsatz: sei $y \in \mathbb{R}$, dann besagt b), dass es $x_0, x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gibt, so dass

$$\tan(x_0) \leq y \leq \tan(x_1).$$

Der Zwischenwertsatz besagt nun, dass es ein $x \in (x_0, x_1)$ gibt, so dass $\tan(x) = y$, da tan stetig ist. Dies beweist Surjektivität.

Injektivität folgt unmittelbar aus strenger Monotonie (i.e. a)): falls $x \neq y$, können wir OBdA annehmen, dass $x < y$. Dann gilt $\tan(x) < \tan(y)$, insbesondere $\tan(x) \neq \tan(y)$, was Injektivität zeigt.

Wir haben also gezeigt, dass $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

(d) Berechne die Ableitung von arctan.

Lösung. Aus Satz 3.22 und c) folgt, dass $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig ist. Jetzt können wir Korollar 4.12 anwenden:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos(x)^2, \quad \text{mit } \tan(x) = y.$$

Aber

$$y^2 = \tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} - 1,$$

und daraus folgt

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{y^2+1},$$

und somit

$$\arctan'(y) = \frac{1}{y^2+1}.$$

10.3. Ableitung II. Berechnen Sie die Ableitung der $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ist

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x=0$ differenzierbar?

Lösung. Falls $x \neq 0$, gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cos\left(\frac{1}{x}\right)(-1)\frac{1}{x^2} \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Die Funktion g ist in $x=0$ nicht differenzierbar, da

$$\liminf_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \liminf_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

und

$$\limsup_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \limsup_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

***10.4. L'Hospital Regel.** Berechnen Sie die Folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12}$

Lösung.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2-8x}{2x+1} = \frac{3\cdot 3^2-8\cdot 3}{2\cdot 3+1} = \frac{3}{7}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Lösung.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x}$

Lösung.

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left((e^x+x)^{1/x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} \overset{(1)}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

wobei (1) folgt da e^x stetig ist. Da sowohl der Zähler als auch der Nenner im Exponenten gegen unendlich divergieren, können wir die Regel von L'Hospital (zweimal) anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1.$$