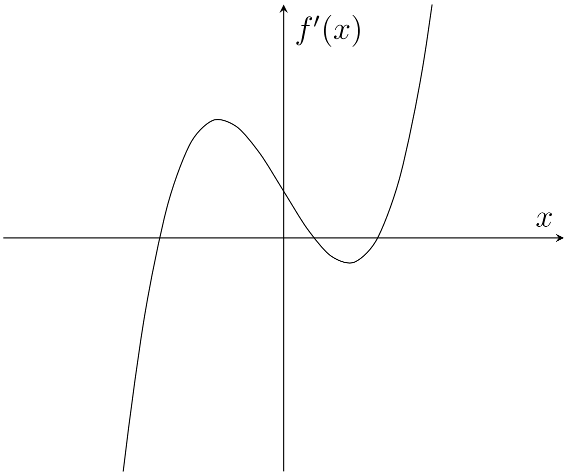
Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

11.1. MC Fragen.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit Graph:



Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

☐ f ist positiv,

Falsch: Zum Beispiel, sei $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - 1$. Die Ableitung f' hat die oben gezeigte Form, aber f ist in $x = 0$ nicht positiv.

☑ f ist nicht monoton,

Richtig: Das Vorzeichen f' bestimmt die Monotonie von f. Da f' Vorzeichen wechselt, kann f nicht monton sein.

☐ f besitzt eine Nullstelle,

Falsch: Sei $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x + 10$. Die Ableitung f' hat die oben gezeigte Form, aber f ist niemals Null.

☑ f' besitzt eine Nullstelle,

Richtig: f besitzt drei Nullstellen.

☐ f'' besitzt keine Nullstelle,

Falsch: f' hat offensichtlich zwei Wendepunkt, was Nullstellen von f'' entspricht.

(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

☑ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

Richtig.

☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

Falsch. Sei $f(x) = |x|$.

☑ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konvex.

Richtig. Siehe Satz 4.29

☐ $f'' > 0 \Longrightarrow f$ ist konkav.

Falsch. Siehe Satz 4.29

(c) Wählen Sie die richtige Aussagen.

☑ Falls f_n stetige Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch stetig.

Richtig. Siehe Satz 3.33.

☐ Falls f_n differenzierbare Funktionen sind und falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, dann ist f auch differenzierbar.

Falsch. Sei

$$f_n\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}.$$

Dann konvergiert f_n *gegen*

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

gleichmässig, aber

$$f_n'(x) \to g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

☑ Falls f_n eine Funktionenfolge ist, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist für jede $n \in \mathbb{N}$ und falls sowohl (f_n) als auch (f_n') gleichmässig konvergieren mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g$, dann ist auch f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Richtig. Siehe Satz 4.39.

***11.2. n-te Ableitung.** Berechnen Sie die n-te Ableitung von die folgende Funktionen:

(a) $\dfrac{1}{1-5x+6x^2}$

(b) $\sin(6x)\cos(4x)$

Lösung.

(a) Es gilt:

$$\frac{1}{6x^2-5x+1} = \frac{1}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{3x-1}.$$

Da

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{2}{2x-1}\right) = (-1)^n n! \frac{2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}}$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{3}{3x-1}\right) = (-1)^n n! \frac{3^{n+1}}{(3x-1)^{n+1}}$$

gilt es

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{6x^2-5x+1}\right) = (-1)^n n! \left(\frac{2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{3^{n+1}}{(3x-1)^{n+1}}\right)$$

(b) Es gilt $\sin(6x)\cos(4x) = \frac{1}{2}(\sin(10x)+\sin(2x))$. Da

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin(x)) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

gilt es

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin(6x)\cos(4x)) = \frac{1}{2}\left(10^n \sin\left(10x+\frac{n\pi}{2}\right) + 2^n \sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

*11.3. Nullstellen von Funktionen.

(a) Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arctan(x)$ nur für $x=0$ verschwindet.

Lösung. Es gilt $f(0)=0$. Wir wissen, dass

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Da $f'(x)>0$ für jede $x\in\mathbb{R}$, ist f steng monoton. Deshalb ist f nur für $x=0$ null.

(b) Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$ nur in einer Punkt verschwindet.

Lösung. Es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad \text{falls} \quad x > 4 \quad \text{oder} \quad x < 0,\\ f'(x) < 0 &\quad \text{falls} \quad 0 < x < 4,\\ f'(x) = 0 &\quad \text{falls} \quad x \in \{0, 4\}. \end{aligned}$$

Also steigt f für $x > 4$ und $x < 0$ und fällt für $0 < x < 4$. Da zusätlich

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$f(0) = -1$ und $f(4) = -33$, sehen wir, dass $f(x) < 0$ für $x \leq 4$. Da

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

folgt nach Zwischenwertsatz, dass es einer Punkt $x > 4$ gibt, so dass $f(x) = 0$.

11.4. Extrema. Finden Sie die Extrema von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}.$$

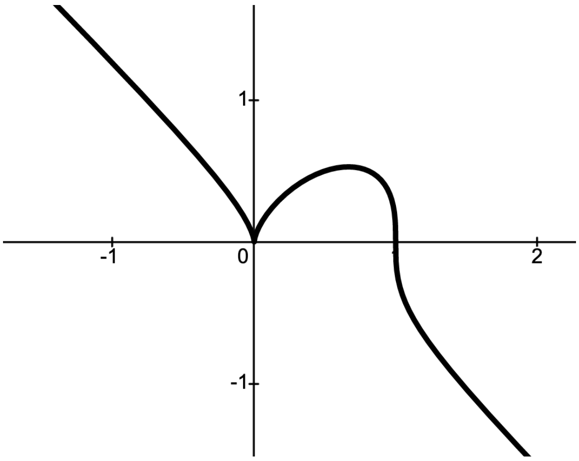
Lösung.

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2-3x)x\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}^2} = \frac{2x}{3}\left(1 - \frac{3}{2}x\right)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}^2}, \qquad x \notin \{0, 1\}.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, wissen wir dass f auf $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ fällt, und auf $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ steigt.

Deshalb hat f die folgende Form:



Falls $x \notin \{0,1\}$ ist $f'(x) = 0$ nur für $x = \frac{2}{3}$. Deshalb ist $f(\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ die einzige Extremum in $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Von den beiden anderen Punkten ist nur $f(0) = 0$ ein Extremum, da f auf $(-\infty, 0)$ fällt und auf $(0, \frac{2}{3})$ steigt. Der Punkt $f(1) = 0$ ist kein Extremum, da f stetig ist und $f' < 0$ auf $(\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty)$ (und desalb f fallend auf $(2/3, \infty)$ ist).