Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

12.1. MC Fragen.

(a) Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ beträgt

☐ 0

☐ $\frac{1}{2}$

☑ 1

☐ 2

Lösung. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x|\, dx &= \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx = -\int_{-1}^{0} x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(0^2 - (-1)^2\right) + \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

(b) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wählen Sie die richtige Aussagen:

☐ f ist immer integrierbar.

Falsch. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist nicht integrierbar.

☑ Falls f monoton ist, ist f auch integreirbar.

Richtig. Siehe Satz 5.17.

☐ Falls f beschränkt ist, ist f auch integrierbar.

Falsch. Siehe Gegenbeispiel oben.

☑ Falls f stetig ist, ist f auch integrierbar.

Richtig. Siehe Satz 5.16.

(c) Ist die folgende Aussage wahr?

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gibt es $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

☐ Ja

☑ Nein

Lösung. Ein Gegenbeispiel ist:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Für Details, siehe Beispiel 5.24.

12.2. Integration I.

(a) Überprüfen Sie nach der Definition, ob das Folgende gilt:

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a),$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung. Sei

$$x_k \coloneqq a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad P_n = \{x_k \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

und

$$\xi_n = \left\{ \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S(c, P_n, \xi_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} c(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n} - a - \frac{k(b-a)}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= c \cdot n \cdot \frac{b-a}{n} = c \cdot (b-a) \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to\infty} S(c, P_n, \xi_n) = c \cdot (b-a)$$

nach Bemerkung auf Seite 2 der Zusammenfassung vom 18.05.2022.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^4 \lfloor x \rfloor \, dx.$$

Lösung. Da

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 2, & x \in [2,3) \\ 3, & x \in [3,4) \end{cases}$$

gilt es

$$\begin{aligned} \int_0^4 \lfloor x \rfloor \, dx &= \int_0^1 \lfloor x \rfloor \, dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor \, dx + \int_2^3 \lfloor x \rfloor \, dx + \int_3^4 \lfloor x \rfloor \, dx \\ &= \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 1 \, dx + \int_2^3 2 \, dx + \int_3^4 3 \, dx \\ &\overset{(\spadesuit)}{=} 0 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + 2 \cdot (3-2) + 3 \cdot (4-3) \\ &= 6, \end{aligned}$$

wobei ($\spadesuit$) aus Teil **(a)** folgt.

***12.3. Integration II.** Berechnen Sie die Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$$

nach der Definition.

Hinweis: Als Partition nehmen Sie $P_n = \left\{ x_k \coloneqq 1 + \frac{k}{n} \mid k \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$ und als Mittelpunkte nehmen Sie $\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$.

Lösung. Sei $f(x) \coloneqq \frac{1}{x^2}$,

$$P_n = \left\{ x_k \coloneqq 1 + \frac{k}{n} \,\middle|\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}, \qquad \xi \quad = \{\xi_k \coloneqq \sqrt{x_k \cdot x_{k+1}} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S(f, P_n, \xi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k \cdot x_{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{(k+n)(k+n+1)} \cdot \frac{1}{n} \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+n)(k+n+1)} \\ &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1} \right) \\ &= n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n \to \infty} S(c, P_n, \xi) = \frac{1}{2}$$

nach Bemerkung auf Seite 2 der Zusammenfassung vom 18.05.2022.

***12.4. Stammfunktionen**

(a) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b) $(x^2 - 2x + 2)^{2022}(2x - 2)$;

(c) $-e^{1/x} \frac{1}{x^2}$;

(d) $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

(e) $\frac{f'(x)}{f(x)}$, mit f beliebig ;

(f) $\tan x$.

Lösung.

(a) Wie bekannt ist, lautet die Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

somit ist $x \mapsto (f \circ g)(x)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(g(x))g'(x)$.

Mit (a) können wir die gesuchten Stammfunktionen einfach berechnen.

(b) Mit $f(x) = x^{2022}$ und $g(x) = x^2 - 2x + 2$, erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto \frac{(x^2-2x+2)^{2023}}{2023}$.

(c) Mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$.

(d) Mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + x^2$, folgern wir, dass eine Stammfunktion $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ ist.

(e) Wie bekannt ist, gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Weil wir wissen nicht ob f positiv ist, müssen wir einen Betrag hinzufügen: eine Stammfunktion ist dann $x \mapsto \log|f(x)|$.

(f) Weil $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cos'(x) = -\sin x$, folgern wir mit (f), dass eine Stammfunktion $x \mapsto -\log|\cos(x)|$ ist.