Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐ $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$

☑ $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$

☑ $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$

Richtig: Man nimmt $g(x) = \frac{x^2}{2}$ mit $g'(x) = x$.

☐ $\int_a^b f(\frac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$

(b) Die Ableitung nach x von $g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

☐ $g'(x) = \int_{2x}^0 \sin^2(t)\cos^2(t)dt.$

☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

☑ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

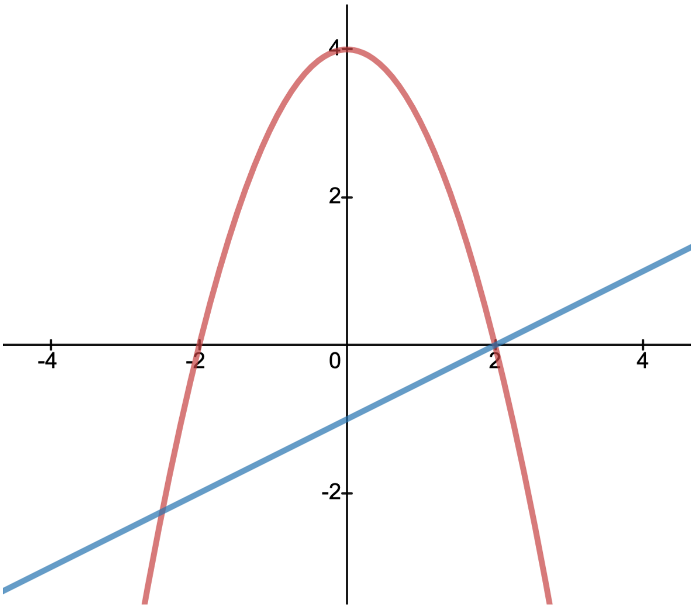
Lösung. Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\sin^2(t)\cos^2(t)$, d.h. $F'(t) = \sin^2(t)\cos^2(t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt = F(1) - F(x^2).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$g'(x) = -F'(x^2)2x = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$$

***13.2. Flächeninhalt einer Form.** Berechnen Sie die Fläche, die durch die lineare Funktion (blau) und die quadratische Funktion (rot) begrenzt ist, wie im Bild unten gezeigt.



Lösung.

Da die quadratische Funktion durch die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ geht, hat sie die Form $f(x) = c(x-2)(x+2)$. Da sie auch durch $(0, 4)$ geht, schliesst man, dass $c = -1$. Also hat f die Form

$$f(x) = -x^2 + 4.$$

Die lineare Funktion hat die Form

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 1.$$

Seien a und b, $a < b$ zwei Punkte, in denen sich f und g schneiden. Die Fläche A, die durch f und g begrenzt ist, ist durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

gegeben.

Es gilt

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_a^b.$$

Um a und b zu finden, müssen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen. Sie ist zu

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$$

äquivalent und hat die Lösung:

$$a = -\frac{5}{2}, \qquad b = 2.$$

Wir schliessen, dass

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{-\frac{5}{2}}^{2} = \frac{29}{48}.$$

13.3. Integration I. Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p \,(1-x)^q \,dx\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

Lösung. Mit einer partiellen Integration erhalten wir

$$I(p+1,q) = \int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^q \,dx$$

$$= -x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,dx = \frac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1)$$

Es folgt

$$I\,(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I\,(p+1,q) \qquad (1)$$

Weiter gilt

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1} \qquad (2)$$

Somit folgt

$$I(p,q) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\, I(p+1,q-1) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\cdot\tfrac{q-1}{p+2}\, I(p+2,q-2) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)}\, I(p+q,0) \overset{(2)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q+1)}$$

$$= \frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \underbrace{\frac{p!}{1\cdot 2\cdots(p-1)p}}_{=1}\cdot\frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

13.4. Integration II. Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

***(a)** $\displaystyle\int_1^7 \frac{4-x^3+x}{x}\,\mathrm{d}x;$ **(b)** $\displaystyle\int_1^2 (x^{2/3}-2)\,(x^2+3)\,\mathrm{d}x;$

***(c)** $\displaystyle\int \cos(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x;$ ***(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$ **(f)** $\displaystyle\int (x^4+4x+4)^{2022}(4x^3+4)\,\mathrm{d}x;$

***(g)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{6x}\cdot\sin(3x)\,\mathrm{d}x;$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{3+4x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^7 \frac{4-x^3+x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^7 \left(4x^{-1}-x^2+1\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[4\log|x| - \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^7\\ &= 4\left(\log 7 - 27\right).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^{2/3}-2)\,(x^2+3)\;\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(x^{8/3}+3x^{2/3}-2x^2-6\right)\;\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{9x^{5/3}}{5}+\frac{3x^{11/3}}{11}-\frac{2x^3}{3}-6x\right]_{x=1}^{2} \\ &= \frac{2}{165}(477\cdot 2^{2/3}-1051)\,.\end{aligned}$$

(c)

$$\int \cos(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\sin(\cos x)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

(d) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{\downarrow}{t^2}\,\underset{\uparrow}{\cos(2t)}\;\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{\uparrow}{\sin(2t)}\underset{\downarrow}{t}\;\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\left[\cos(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2)+\frac{1}{2}\cos(2)-\frac{1}{4}\sin(2) = \frac{1}{4}(\sin(2)+2\cos(2)).\end{aligned}$$

(e) Wir teilen den Burch auf:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{1}{2}.$$

Weil $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\;\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}\;\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\;\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4}-\frac{\pi}{8} \;=\; \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\,.\end{aligned}$$

(f) Mit der substitution $u=u(x)=x^4+4x+4$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (x^4+4x+4)^{2022}(4x^3+4)\,\mathrm{d}x &= \int u^{2022}du \\ &= \frac{1}{2023}u^{2023}+C \\ &= \frac{(x^4+4x+4)^{2023}}{2023}+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(g) Wir integrieren zwei Mal partiell bis wir auf der rechten Seite wieder das Integral der linken Seite (mit anderem Faktor) finden:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{6x}} \sin\underset{\uparrow}{(}3x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3x)\mathrm{e}^{6x} - 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\int -\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{6x}}\cos\underset{\uparrow}{(}3x)\,\mathrm{d}x + C \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3x)\mathrm{e}^{6x} + \frac{2}{3}e^{6x}\sin(3x) - 4\int e^{6x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x + C \\
&= -\frac{1}{3}\cos(3x)\mathrm{e}^{6x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{6x}\sin(3x) - 4I + C,
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{6x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = I &= \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{6x}\sin(3x) - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x}\cos(3x)\right) + C \\
&= \frac{1}{15}e^{6x}\left(2\sin(3x) - \cos(3x)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(h) Mit der Substitution $u = 3 + 4x^2$, erhalten wir

$$
\int \frac{2x}{\sqrt{3+4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{du}{4u^{1/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{1}{2}\sqrt{3+4x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
$$