Die Aufgaben aus dieser Serie werden nicht korrigiert.

14.1. MC Fragen.

Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

☐ f monoton fallend ist.

Falsch. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht.

☐ $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Falsch. Sei

$$f\colon [1,\infty) \to [0,\infty), \qquad f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N}, \\ 1, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 0$ konvergent, aber das Integral divergiert.

Falls f auch monoton fallend wäre, wäre die Aussage richtig; siehe Satz 5.53.

☐ f beschränkt ist.

Falsch. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nochmals ein Gegenbeispiel, da $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert nicht.

(b) Gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}?$$

☑ Ja.

☐ Nein.

Lösung. Falls $x \in [1, 2)$, sei

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\sin(\pi x)}{1}\,\mathrm{d}x,$$

falls $x \in [2, 3)$, sei

$$I_2 = \int_2^3 \frac{\sin(\pi x)}{2}\,\mathrm{d}x,$$

und so weiter. Im Allgemeinen, falls $x \in [k, k+1)$,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot(-\cos(\pi x))\Big|_k^{k+1} \\ &= \frac{\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)}{k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

für jede $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Deshalb gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^k}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

(c) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0, 1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\le t\le 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\le t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\le t<\frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ \cdots \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\le t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \le x < \frac{j+1}{n} \\ \cdots \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\le t\le 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \quad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\le t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) $\exists\, x_0 \in \,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

☑ Richtig.

☐ Falsch.

(ii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

☑ Richtig.

☐ Falsch.

(iii) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

☑ Richtig.

☐ Falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

☑ Richtig.

☐ Falsch.

Lösung. Wir haben $\forall\, x \in \,]0,1[$

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan\left(\frac{2\pi}{x}\right) = \frac{\pi}{2x}$$

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen $\tan\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ und $\frac{\pi}{2x}$.
Weil $g \in C^1$ und $|g'| < C$, konvergiert die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen g.
Dann $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

14.2. Partialbruchzerlegung. Berechnen Sie

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+2)} dx.$$

Lösung. Wir berechnen A, B und C, so dass

$$\frac{x+7}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}{x^2(x+2)},$$

das heisst,

$$x + 7 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2.$$

Durch Einsetzen von $x = 0$ erhalten wir $B = \frac{7}{2}$, durch Einsetzen von $x = -2$ erhalten wir $C = \frac{5}{4}$ und deshalb ist $A = -\frac{5}{4}$. Dann gilt es

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{-5/4}{x} + \frac{7/2}{x^2} + \frac{5/4}{x+2} \right) dx = -\frac{5}{2} \ln|x| - \frac{7}{2x} + \frac{5}{4} \ln|x+2| + C.$$

14.3. Euler Funktion. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

(a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x$ konvergiert, genau dann, wenn $s > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x$ für jede s konvergiert.

Dies zeigt, dass $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x$ für jede $s > 0$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \Gamma(1/2)$ gilt.

Hinweis: Schreiben Sie $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. Verwenden Sie die Substitution $v = t^2$.

Lösung.

(a) Aus $e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1}$ für $x \in (0, 1]$ und Beispiel 5.57 im Skript folgt, dass

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x$$

für $s > 0$ konvergiert.

(b) Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es M so dass:

$$x^{s-1} \leq M \cdot e^{\frac{x}{2}} \qquad \forall x \geq 1$$

woraus folgt

$$e^{-x}x^{s-1} \leq Me^{-\frac{x}{2}}.$$

Da $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, folgt aus Lemma 5.51 (1), dass

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Da e^{-t^2} eine gerade Funktion ist, gilt

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Mit die Substitution $v = t^2$ erhalten wir

$$2\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^v \cdot \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty e^v v^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}v = \Gamma(1/2).$$

Dies beweist, dass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2).$$

14.4. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x;$

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t;$

(h) $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x;$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

Lösung. Wir nennen jeweils "I" das betrachtete Integral.

(a) Da $\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq \frac{1}{x^3}$ für $x>0$, gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^a \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{für jedes } a>1,$$

und bekanntlich ist $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ konvergent; ausserdem ist $a\mapsto \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Wir schliessen, dass der Grenzwert für $a\to+\infty$ existiert, das heisst, dass I konvergent ist.

Mit der Substitution $t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6}t\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{1-t^2}{t^4} = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} t^{-4}-t^{-2}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\left[-\frac{1}{3}t^{-3}+t^{-1}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}}\\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-3/2}+\sqrt{\frac{a}{a+1}}+\frac{1}{3}2^{3/2}-\sqrt{2},\right)
\end{aligned}$$

also:

$$I=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$$

(b) Das Integral konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Mit der Substitution $t = \frac{1}{x}$ und für $0 < \epsilon < A$ erhalten wir:

$$\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\epsilon}^{1/A} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{1/A}^{1/\epsilon} = -e^{-\frac{1}{\epsilon}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{A}},$$

und dieser Ausdruck strebt nach 1 für $A \to +\infty$ und $\epsilon \to 0^+$. Somit konvertiert das Integral und

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(c) Wir sehen, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x|\log|x|}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{1+x^2}\log x = +\infty,$$

somit wächst der Integrand schneller als $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ nicht integrierbar über $(1, +\infty)$ ist, kann I erst recht nicht konvergieren.

(d) Wir trennen das Integral:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$, und weil $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_1 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \le \frac{1}{x^{3/2}}$ für $x \ge 1$, und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_2 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Wir folgern, dass I konvergiert.

Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{1}{t(1+t^2)} 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\arctan t\right]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Da $\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(0) = 0$, wir schliessen, dass $I = \pi$.

(e) Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_a^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \sqrt{a}\cos\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\int_a^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$\lim_{a\to 0}\cos 1 - \sqrt{a}\cos\frac{1}{a} = \cos 1.$$

Also müssen wir nur konvergenz von

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

zeigen. Es genügt, die Konvergenz von

$$\int_0^1 \frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

zu beweisen. Dieses Integral konvergiert, da

$$0 \leq \frac{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

und wir wissen, dass

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

konvergiert.

(f) Die Funktion $\frac{4x^3}{x^3-1}$ ist in die Punkte $x = 1$ und $x = -1$ nicht definiert.

Die Integral I konvergiert genau dann, wenn die Integrale

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{1}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x,$$

konvergieren. Da

$$\int_{-2}^{-1} \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln|x^4 - |\Big]_{-2}^{-1-\varepsilon}$$

divergiert, divergiert auch I.

(g) Für alle $t \geq 0$ gilt mittels Taylor-Formel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,t]$. Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{6}{6 - t^2\cos\tau} - 1\right) = \frac{t\cos\tau}{6 - t^2\cos\tau} \leq \frac{t}{5}, \quad t \in [0,1].$$

Der Integrand ist stetig nach 0 fortsetzbar, somit ist das Integral konvergent.

(h) Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x\log x}$ ist positiv in $(0, \frac{1}{e})$, weil $x\log x < 0$ in $(0, \frac{1}{e})$. Da $\mathrm{e}^t > 1 + t$ für jedes $t > 0$, erhalten wir:

$$e^{x\log x} > 1 + x\log x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{x\log x}} > \frac{1}{1 - (1 + x\log x)} = \frac{1}{x\log x}.$$

Bekanntlich ist $\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ divergent. Somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral divergent.

(i) Die Substitution $t = \frac{1}{u}$ liefert, dass es äquivalent ist, die Konvergenz von:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x$$

zu untersuchen. Mittels Taylor-Formel gilt: $\sin u = u - \frac{u^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0,u]$, somit:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{\cos\tau}{6}u\right)\mathrm{d}u,$$

und dieses Integral ist bekanntlich divergent. Somit ist I divergent.