Die Aufgaben aus dieser Serie werden nicht korrigiert.

15.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Seien

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \text{ oder } x > 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

und

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)dx$$

wobei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl bezeichnet. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) f ist stetig, aber f ist nicht glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) f besitzt unendlich viele lokale Minimalstellen.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) f besitzt ein lokales Maximum in $x = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $a_1 > 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

Lösung. Similar to Aufgabe 10.3, we can show that (i) is wrong.
For (ii), one could do direct computation. For $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}\sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + \cos(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 0$$

is equivalent to

$$\tan(x) = -\frac{x^3}{2}.$$

Because $\tan(x)$ is a periodic function, the equation above has infinitely many positive solutions.
(iii) is wrong, because $f(x) \leq 0$ for $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ and $f(x) \geq 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(iv) is correct. Note

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{(x+2\pi)^2}\Big)dx$$
$$\int_{3\pi}^{4\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)dx = -\int_0^{\pi} \sin(x)\exp\Big(-\frac{1}{(4\pi-x)^2}\Big)dx$$

then $a_1 > 0$.
As $k \to \infty$, $\exp(-\frac{1}{x^2})$ converges uniformly to 1 in $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$, then (v) is correct.

15.2. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen f konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Sei $x_0 \in \,]a, b[$. Falls f_n für alle $n \geq 1$ in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 differenzierbar.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition P von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim\limits_{n\to\infty} s(f_n, P)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = s(f, P).$$

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist, so ist f gleichmässig stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls f_n für alle $n \geq 1$ konvex ist, so ist f konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

Lösung. (i) is wrong. Let

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{nx^4}{1+nx^2}}$$

then $f_n(x)$ converges to $|x|$ uniformly in $[-1,1]$. $f_n(x)$ is C^1 for any n, but $x \to |x|$ is not C^1 in $[-1,1]$.
A partition is a finite number of intervals. Because f_n onverges to f uniformly, then f_n onverges to f uniformly in each of these finitely many intervals. Then the infimum of f_n converges to the infimum of f in each of these finitely many intervals. Taking the linear combination, then one concludes (ii) is correct.
Since f_n is continuous and f_n converges to f uniformly, f is also continuous. $[a,b]$ is a compact interval with $a, b \in \mathbb{R}$ and $a < b$, then f is uniformly continuous. (iii) is correct.
f_n is convex means for any x, y and any $t \in [0,1]$

$$f_n(tx + (1-t)y) \leq t f_n(x) + (1-t) f_n(y).$$

Passing this to its limit, we see

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Thus (iv) is correct.

15.3. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x)\sin(2\pi x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \leq x < \frac{j+1}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) g ist glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) $\exists\, x_0 \in\,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

Lösung. For (i), g is continuous. It is not differentiable at the point 0, since

$$\limsup_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \limsup_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)\sin(2\pi x)}{x} \to -\infty,$$

so (i) is wrong.
Although f' is not defined at $x=0$, f' is defined for any $x \in]0,1[$.

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(2\pi x) = -2\pi x\ln(x)$$

Sketch the graphs of the functions $x \to \tan(2\pi x)$ and $x \to -2\pi x\ln(x)$ and one can see (ii) is correct.
We prove (iii) is true. Define

$$\alpha_n = \max_{0\leq j<n}\Big\{\sup_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t) - \inf_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)\Big\}.$$

Cliam: $\alpha_n \to 0$ as n goes to $+\infty$.
With this claim, one can verify the definition of uniform convergence directly. Now, to prove the uniform convergence, it suffices to prove the claim:
Fix any small $\epsilon > 0$. Since g is continuous in $[0,1]$, we can find $N_1 \in \mathbb{N}$ large enough such that

$$\sup_{0\leq t<\frac{1}{N_1}} g(t) - \inf_{0\leq t<\frac{1}{N_1}} g(t) \leq \epsilon.$$

Note that g is of C^1 in the interval $[\frac{1}{N_1}, 1]$ and its derivative is bounded by a constant $C > 0$ in $[\frac{1}{N_1}, 1]$. Choose $N_2 \in \mathbb{N}$ with $\frac{N_2}{N_1}$ being a positive integer and $\frac{C}{N_2} < \epsilon$. Then for any $x, y \in [\frac{1}{N_1}, 1]$,

$$|g(x) - g(y)| \leq C|x - y| \Longrightarrow \sup_{\frac{j}{N_2} \leq t < \frac{j+1}{N_2}} g(t) - \inf_{\frac{j}{N_2} \leq t < \frac{j+1}{N_2}} g(t) \leq \epsilon \text{ for any } j \geq \frac{N_2}{N_1}.$$

Then for any $n \geq N_2$, $\alpha_n \leq \epsilon$. This concludes the proof of the claim.
From Satz 5.2.7 of professor Marc Burger's note, one can deduce that g is integrable because g is continuous. Note that $g_n \leq g$. (iv) is correct.
(v) is correct because of the uniform convergence.

15.4. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)(n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

Richtig: *Es gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)n^2} = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+3)} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

(b) Die Folge ist beschränkt.

Richtig: *Für alle* $n \geq 1$ *gilt* $1 \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{n+2}$ *und damit*

$$a_n \leq \frac{3}{2}.$$

Also ist (a_n) *beschränkt.*

(c) Die Folge ist divergent.

Falsch: $\lim_{k\to\infty} = \frac{3}{2}$.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

Falsch.

15.5. Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(c) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(d) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

Lösung. (b) ist richtig. In (a) fehlt die Stetigkeit, in (c) die Randbedingung. Dann (a) und (c) sind falsch. (d) ist zum Beispiel dann falsch, wenn $f(a) = 0$ gilt und f streng monoton wächst, wie bei der Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x$.

15.6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x x^3 \ln x$. Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

(a) $x^2(3 \ln x + x \ln x)e^x$

(b) $x^2(3 \ln x + 1)e^x$

(c) $x^2(3 \ln x + 1 + x \ln x)e^x$

(d) $3x^2$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung. (c) ist richtig

15.7. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) $-\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Lösung. (a) und (b) sind wahr. (a): $\exp'' = \exp > 0$.
(b): $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
(c): Zum Beispiel,

$$H(0.5(-1) + 0.5(+1)) = 1 > 0.5H(-1) + 0.5H(1) = 0.5.$$

15.8. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

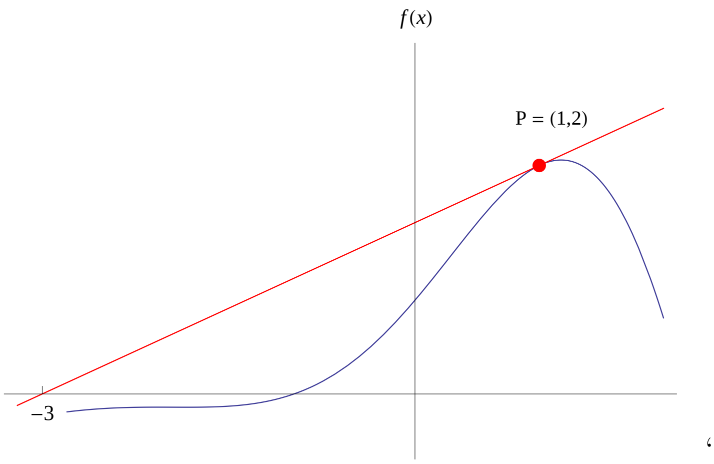
(b) Nein.

Lösung. Nein. Gegenbeispiel: Betrachten Sie die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit $f = g = H$ gilt es $f \circ g \equiv 1$, aber H ist nicht differenzierbar in 0.

15.9. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Lösung. (b) ist wahr. Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

15.10. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f : [2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-2)^{\frac{1}{3}},$$

an der Stelle $x = 10$?

(a) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

(b) $y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{6}$.

(c) $y = \frac{1}{12}x + 2$.

(d) $y = \frac{1}{4}x + 2$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung. (b) ist wahr. Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y = ax + b$ gegeben, wobei $a = f'(10)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(10, f(10))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

und damit $a = f'(10) = \frac{1}{12}$. Aus $(10, f(10)) = (10, 2)$ folgt, dass b die Gleichung $2 = \frac{10}{12} + b$ erfüllt, dass also $b = \frac{7}{6}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

15.11. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = x^2$.

(d) $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

(e) $f'(x) = x + x \log x$.

(f) keiner der obigen Ausdrücke.

Lösung. (d) ist wahr. Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \log x)' e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x) x^x.$$

15.12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

Lösung. (c) ist falsch. Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$. Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ ist identisch gleich 0 und daher für $x \neq 0$ verschieden von $f(x)$. Die übrigen Aussagen sind richtig.

15.13. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

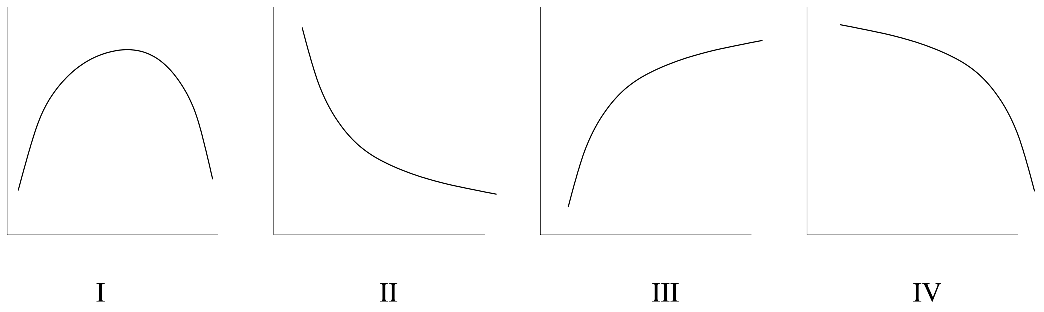
(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

(c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

Lösung. Jede Extremalstelle ist ein kritischer Punkt, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat $x \mapsto x^3$ einen Terrassenpunkt bei $x = 0$, aber kein (lokales oder globales) Extremum. Die richtige Antwort lautet also (c).

15.14. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) Keine.

Lösung. (a), (c) und (d) sind wahr. Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also G_f eine Rechtskurve beschreibt.

15.15. Sei

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

(c) -16 ist das globale Minimum von f auf $[0,6]$.

(d) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

(e) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Lösung. (a), (c), (d) und (e) sind wahr. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$f'(x) > 0 \ \text{ für } \ x \in (0,1)$$

$$f'(x) < 0 \ \text{ für } \ x \in (1,4)$$

$$f'(x) > 0 \ \text{ für } \ x \in (4,6),$$

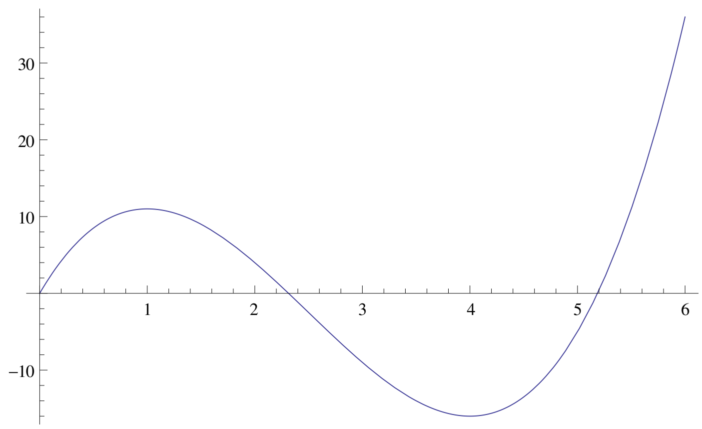
ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

$$f(0) = 0, \ f(1) = 11, \ f(4) = -16, \ f(6) = 36.$$

Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;
- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



15.16. Bestimmen Sie das globale Maximum von $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lösung. (c) ist wahr. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$

$$= 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ und } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

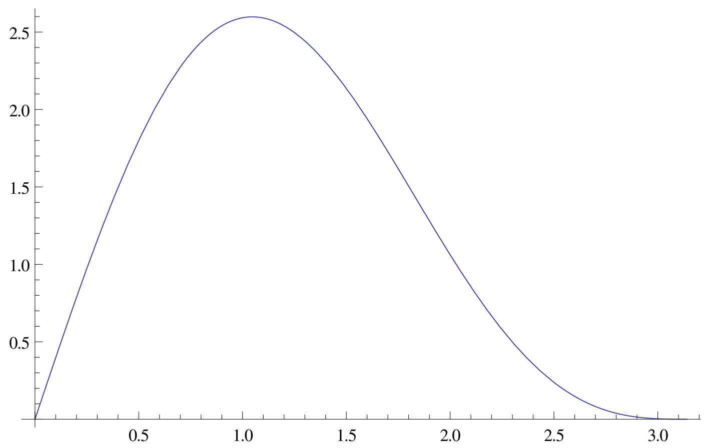
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0, \pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\ f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



15.17. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \cos(x^2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist f auf dem Definitionsbereich D injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0, 1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von f im Intervall $[1/\sqrt{2}, 1]$.

Lösung. (a) und (c) sind wahr. Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0, 1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos((\sqrt{\arccos x})^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[0, \sqrt{\pi/4}]$ unter f gleich $[1/\sqrt{2}, 1]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

15.18. Sei $0 < \alpha < 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - \alpha \sin x$. Welche der Aussagen gilt?

(a) f ist strikt monoton wachsend.

(b) f ist konvex.

(c) Die Umkehrfunktion g von f erfüllt $g'(0) = (1 - \alpha)^{-1}$.

Lösung. (a) und (c) sind wahr. f ist unendlich oft differenzierbar mit positiver Ableitung $1 - \alpha \cos x$. Die zweite Ableitung $\alpha \sin x$ von f wechselt das Vorzeichen. Als Konsequenz der Kettenregel gilt $g'(f(0))f'(0) = 1$. Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1 - \alpha$ folgt die Aussage.

15.19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

(a) Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.

Richtig: *Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$ für alle $x \in E$. Es folgt, dass der Grenzwert ebenfalls 0 ist.*

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Richtig: *Aus dem archimedischen Prinzip schliesst man, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \forall p \in \mathbb{Z} \forall q \in \mathbb{N} \quad 0 < \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| < \epsilon \Rightarrow q \geq N \; .$$

Daraus folgt, dass f an jeder Stelle x_0 den Grenzwert 0 hat.

(c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Falsch: *Gegeben $\epsilon < 1$ existiert keine Umgebung $U = (C, +\infty)$ von $+\infty$, für die gilt $x_0, x_1 \in U \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > C$. Dann sind $n, \sqrt{2}n \in U$ und $f(n) = 1$, $f(\sqrt{2}n) = 0$. Also existiert der Grenzwert von f für $x \to +\infty$ nicht.*

(d) f ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Falsch: *Es gilt $\{x \in \mathbb{R} | \; f \text{ nicht stetig in } x\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, da $f(x_0) = 1/q \neq 0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ist, wenn q der (gekürzte) Nenner von $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist.*

15.20. Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Richtig: *Es gilt $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ und damit folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus derjenigen von $\int_1^\infty e^{-x} dx$.*

(b) $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$

Richtig: *Wir kürzen $\int_0^x \cos(x^2) dx = F(x)$ ab. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \infty$ und $x_n^2 > \pi/2$. Dann existieren eindeutige $k_n \in \mathbb{N}$ mit $\pi(k_n - 1/2) < x_n^2 \leq \pi(k_n + 1/2)$. Es folgt*

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \leq F(x_n) \leq F((\pi(k_n + 1/2))^{1/2})$$

oder

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \geq F(x_n) \geq F((\pi(k_n + 1/2)^{1/2})$$

abhängig davon, ob k_n gerade oder ungerade ist. Da nun die Folge $F((\pi(n + 1/2))^{1/2})$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert, folgt die Konvergenz der Folge $F(x_n)$.

(c) $\int_0^\infty |\cos(x^2)|dx$

Falsch: *Wir schreiben* $\int_0^x |\cos(x^2)|dx = F(x)$*. Für die Folge* $x_n = (\pi(n+1/2))^{1/2} \to \infty$ *gilt*

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\cos(x^2)|dx \geq (x_{n+1} - x_n)/2 \geq \frac{\pi^{1/2}}{4(n+1/2)^{1/2}} .$$

Für die erste Ungleichung genügt es, festzustellen, dass $\cos(x^2)$ *zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen konvex oder konkav ist und den Wert* ± 1 *erreicht. Wir haben gezeigt, dass die Folge* $F(x_n)$ *divergiert.*

(d) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Richtig: *Der Beweis ist genau wie in der 2. Teilaufgabe.*

(e) $\int_0^\infty x\cos(x^4)dx$

Richtig: *Es gilt* $\int_0^u x\cos(x^4)dx = \frac{1}{2}\int_0^{u^2} \cos(t^2)dt$*. Das bedeutet, dass es sich um dasselbe Integral wie in der zweiten Teilaufgabe handelt.*

15.21. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Sei $c \in [0,\pi]$ beliebig, sei $(a_k)_{k\geq 1}$ die rekursiv definierte Folge:

$$a_1 = c,$$
$$a_{k+1} = \sin(a_k), \quad k \geq 1.$$

Zeige Sie, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Lösung.

When $a_1 \in [0,\pi]$, $a_k \geq 0$ for any $k \in \mathbb{N}^*$, by induction. Since $\sin x \leq x$ for any $x \geq 0$, $(a_k)_{k\geq 1}$ is decreasing.

The induction argument:
For $k = 1$, $a_2 = \sin(a_1) < a_1$ and $a_2 \in [0,1]$ because $a_1 \in [0,\pi]$.
Assume $a_k \in [0,1]$, then $a_{k+1} = \sin(a_k) < a_k$ and $a_{k+1} \in [0,1]$ because $a_k \in [0,1]$.

$(a_k)_{k\geq 1}$ is convergent, since $(a_k)_{k\geq 1}$ is bounded from below and decreasing.

Denote the limit of $(a_k)_{k\geq 1}$ by α, we have $\alpha = \sin\alpha$, which gives $\alpha = 0$.

15.22.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{1+i}{2+3i} \cdot e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2}$$

in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=-1}) + (\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) \\ &= \frac{2+2i-3i+3}{4+9} \cdot (-i) + i = \frac{-1-5i}{13} + i = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} z &= (2+i)(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) + \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}) \\ &= 2i - 1 - i \cdot \frac{2i-2+1+i}{4+1} = 2i - 1 - i \cdot \frac{3i-1}{5} \\ &= 2i - 1 + \frac{3+i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

15.23.

(a) (**Prüfung FS 2011**) Brechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

(b) (**Prüfung FS 2011**) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$.

(c) (**Prüfung HS 2013**) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n},\, n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $2,\, 2\sqrt{2},\, 2\sqrt{2\sqrt{2}},\, 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

Lösung.

(a) Mit Hilfe der Reihenentwicklung von e^x und $\sin x$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1-1/n}{1-n\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-2}+O(n^{-3})}{1-n(n^{-1}-\frac{1}{6}n^{-3}+O(n^{-5}))} = \frac{1/2}{1/6} = 3.$$

(b) Die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ ist $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+O(x^3)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{1}{2}n^{-3}-O(n^{-6})-1-\frac{1}{2}n^{-1}+O(n^{-2})\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Beh. 1: $a_n \leq 2,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
$n=1$: $a_1 = 1 \leq 2$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Nach Induktionsannahme: $a_n \leq 2 \implies a_n + 1 = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} < 2$. Dies zeigt Behauptung 1.

Beh. 2:(a_n) ist monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
Verankerung: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2$
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Da nach Ind.annahme $a_n \leq a_{n+1}$ ist, folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Dies zeigt Behauptung 2.

Da jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge, konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$, für ein a das wir noch bestimmen müssen.

Falls a der Grenzwert der Folge ist, muss a unter der Rekursionsvorschrift fest bleiben, d.h.

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Somit gilt $a^2 = 1 + a \iff a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ muss auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein und damit ist

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(d) Das n-te Folgenglied ist gegeben durch $a_n = 2^{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}$ und für die geometrische Summe gilt $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}} = 2^{\frac{1}{1-1/2}} = 2^2 = 4.$$

15.24.

(a) (**Prüfung FS 2014**) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

Lösung.

(a) Wir bemerken $|\sin(n)| < 1$ für alle $n \geq 1$. Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

(b)

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{n^2+n} &= \frac{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{n^2+n})}{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{n^2+n})} \\ &= \frac{\frac{1}{n}-n}{(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{n^2+n})} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}-1}{(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}})}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe nicht.

(c) Die Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{2015}}$ ist nicht negativ und monoton fallend. Nach dem Integraltest konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Das Integral konvergiert, denn es ist:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2015}}\,dx = -\frac{1}{2014}x^{-2014}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2014}.$$

Somit konvergiert auch die Reihe.

15.25.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n+3}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n-2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

Lösung.

(a) *Behauptung 1:* Die Folge ist monoton wachsend.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $1 = d_1 < \sqrt{5} = d_2$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} > \sqrt{2d_{n-1} + 3} = d_n$. Behauptung 1 ist also bewiesen.

Behauptung 2: Die Folge ist nach oben durch 3 beschränkt.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $d_1 = 1 \leq 3$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Behauptung 2 ist also auch gezeigt.

Nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergiert jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert d muss die Gleichung $d = \sqrt{2d+3} \iff d^2 - 2d - 3 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

Da die Folge monoton wachsend ist und $d_1 = 1 > -1$ ist, folgt $d \neq -1$. Somit ist der Grenzwert $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 3$.

(b) Offensichtlich ist die Folge von unten durch 0 beschränkt.
Behauptung 1: Die Folge ist monoton fallend.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_2 = \sqrt{9-2} = \sqrt{7} < 3 = d_1$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \leq \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n$.
Damit ist Behauptung 1 gezeigt.

Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, konvergiert nach dem Satz über monotone Konvergenz. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert muss die Gleichung $d = \sqrt{3d-2} \iff d^2 - 3d + 2 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} .$$

Behauptung 2: Für jedes $n \geq 1$ gilt $d_n \geq 2$.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_1 = 3 > 2$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \geq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.
Somit ist auch Behauptung 2 gezeigt.

Also ist $d \neq 1$ und es folgt $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 2$.

15.26.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Bestimmen Sie die ersten zwei **nicht** verschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

durch eine Potenzreihe in x dar.

Lösung.

(a) Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \sqrt{1-x^2} \\
F''(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
F'''(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x^2}{2(1-x)^{3/2}} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \underbrace{F(0)}_{=0} + 1 \cdot x - 0 - \frac{1}{6}x^3 - \dots \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 - \dots .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ also } \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Da die Taylorreihe auf ihrem Konvergenzbereich gleichmässig konvergiert können wir gliedweise integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.\end{aligned}$$

15.27. Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,r^{-1}, & \text{falls } x \in [0,2[,\\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2,4]\end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

Lösung. Damit $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, muss gelten $\forall x \in [2,4] : 2rx - x^2 \geq 0$. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in [2,4] : 2r > x$. Notwendige Bedingung ist also $2r \geq 4$, das heisst, $r \geq 2$. f ist auf $[0,4] \setminus \{2\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Die Bedingung für Stetigkeit auf $[0,4]$ ist daher

$$\lim_{2>x\to 2} f(x) = f(2) = \lim_{2<x\to 2} f(x).$$

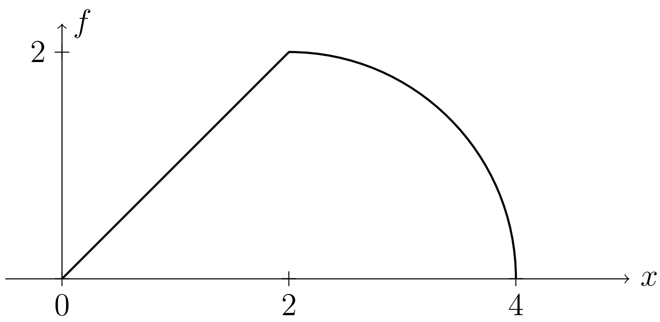
Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{2>x\to 2} f(x) &= \lim_{2>x\to 2} 2x\,r^{-1} = 4r^{-1},\\ \lim_{2<x\to 2} f(x) &= \lim_{2<x\to 2} \sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{4r-4} = 2\sqrt{r-1}.\end{aligned}$$

Die Bedinung lautet also $4r^{-1} = 2\sqrt{r-1}$. Wegen $r \geq 2$ ist dies äquivalent zu $4 = r^2(r-1)$. Wir sehen, dass $r = 2$ die eine gültige Lösung ist. Somit ist f stetig für $r = 2$. Um den Graphen von f zu zeichnen, beobachten wir, dass der Graph von

$$\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$$

Teil des Kreises mit Radius r um den Punkt $(r,0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Für $r = 2$ erhalten wir:



15.28.

(a) **(Prüfung HS 2010)** Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x.$$

(b) **(Prüfung FS 2010)** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\cdot(1-\cos(x))}{x\cdot\sin(x)}.$$

(c) **(Prüfung FS 2011)** Bestimmen Sie die Werte von den reellen Parametern a und b so, dass der Limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(a+bx)}{x^2}$$

existiert und bestimmen Sie den Limes in diesem Fall.

Lösung.

(a) Nach Stetigkeit gilt $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x}{1+x})x}$. Da

$$\lim_{x\to\infty}\ln(\frac{x}{1+x})x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x}$$

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{-1/x^2} = -1.$$

Somit folgt folgt, dass $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(b) Da

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1/2,$$

folgt, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$$

Da $\cos(x) - (a+bx)$ für $x = 0$ der Wert $1 - a$ besitzt, kann der obige Limes nur für $a = 1$ existieren.

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann. Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (1+bx)}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - b}{2x}.$$

Da $-\sin(x) - b$ für $x = 0$ der Wert $-b$ besitzt, kann der obige Limes nur für $b = 0$ existieren.

Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

15.29.

(a) **(Prüfung HS 2010)** Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

(b) **(Prüfung FS 2010)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1}.$$

(c) **(Prüfung FS 2011)** Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

(d) **(Prüfung HS 2011)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 1}.$$

(e) **(Prüfung HS 2009)** Bestimmen Sie die Menge **aller** $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+4} \cdot x^n$$

konvergiert.

Lösung.

(a) s_n ist für $n \geq 0$ monoton wachsend und beschränkt, weil

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{j^2-2}{2^j (j+1)^2} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2-1}{2^j (j+1)^2} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2 \end{aligned}$$

gilt. Somit konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe, weil die harmonische Reihe divergiert.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n}+n+1} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n}+2)n} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \\ &\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} |a_n| &= |\sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}| \\ &= |\sin(n)| \cdot |\frac{2n-1}{(n+1)^2}| \\ &\leq |\frac{2+\frac{1}{n}}{n+2+\frac{1}{n}}| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ . \end{aligned}$$

Somit konvergiert a_n gegen 0.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \geq \frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \\ &\geq \frac{1}{2n} \ , \end{aligned}$$

für $n \geq 9$.

Es ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergiert, insbesodere divergiert auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Nach Minoranten / Majorantenkriterium / Cauchy-Kriterium divergiert somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Somit ist die Reihe konvergent.

(e) Konvergenzradius ist

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+4}}{4} = \frac{1}{4}$$

Also Konvergenz in $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$ einzeln untersuchen.

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{divergent, da es harmonische Reihe ist}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{konvergent, da alternierende harmonische Reihe}$$

15.30. (Prüfung HS 2009)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^{(x^2)}, \quad x > 0$$

sowie

$$(f^{-1})'(2).$$

(b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \mathrm{Im}(e^{i\pi/4} \cdot z) < \sqrt{2}\}.$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.
Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

Lösung.

(a)

$$f(x) = 2x^{x^2} = 2(e^{\log(x)})^{x^2} = 2e^{x^2 \cdot \log(x)}$$

also

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2 \log(x)} \cdot (x^2 \log(x))' = 2x^{x^2}(2x \cdot \log(x) + x)$$

Da $f(1) = 2$ ist $f^{-1}(2) = 1$ und (Umkehrsatz)

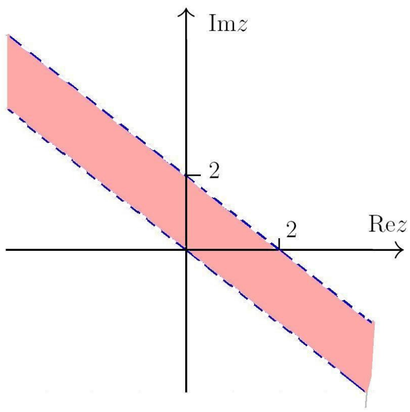
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

(b) $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Rightarrow$ für $z = x + iy$:

$$(x+iy)e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + i(x+y))$$

Also ist Bedingung

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x+y < 2 \Leftrightarrow -x < y < 2-x$$



(c) Für $f(t) = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$ ist $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$. $\Rightarrow$ Lineares Taylorpolynom um $t_0 = 8$:

$$P_1 f(t) = f(8) + f'(8)(t-8) = 2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 \cdot (t-8)$$

Also Näherung für $\sqrt[3]{7}$:

$$P_1(7) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$$

Fehlerabschätzung:

$$\text{Restglied} = \frac{f''(\xi)}{2!}(t-t_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}(7-8)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

für ein $\xi \in [7,8]$.

Aus $f''(t) = -\frac{2}{9}t^{-5/3}$

$$\Rightarrow |\text{Fehler}| \leq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[7,8]}|f''(\xi)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7^{5/3}} = \frac{1}{9\cdot 7^{5/3}}.$$

15.31. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int e^{-2x}\sin(6x)\,dx\ .$$

(b)

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx\ .$$

(c)

$$\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx\ .$$

Lösung.

(a) Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) + 3\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\cos(6x)}_{\downarrow}\,dx \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) - 9\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 10\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) + c \\ \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{20}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{20}\cos(6x) + \tilde{c}\,. \end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $\sqrt{x-1} = u$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = du$ folgt es

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2+1}du \\ &= [2\arctan u]\,\Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\,. \end{aligned}$$

(c) Variante 1:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx - \int \frac{5x}{x^3-x^2-2x}\,dx \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx\,. \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{1}{x^2-x-2}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B = 0\,, \\ -2A + B = 1\,. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $A = \frac{-1}{3}$ und $B = \frac{1}{3}$.

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\left[\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx\right] \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c\,. \end{aligned}$$

Variante 2: Direkt mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C &= 3\ , \\ -A+B-2C &= -7\ , \\ -2A &= -2\ . \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass $A=1$. Das System reduziert sich auf $\begin{cases} B+C &= 2\ , \\ B-2C &= -6\ , \end{cases}$ die $B=2-C$ impliziert. Somit folgt $2-C-2C = -6 \quad \Rightarrow C=\frac{8}{3}, B=\frac{-2}{3}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\ . \end{aligned}$$

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned} &\ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c = \\ =\ &\ln(|x|\cdot|x-2|\cdot|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\ =\ &\ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\ =\ &\ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\ . \end{aligned}$$

15.32.

(a) (Basisprüfung D-INFK Winter ’15) Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals. Es wird in dieser Teilaufgabe erwartet, dass Sie verwendete Stammfunktionen **selbst** berechnen.

Lösung.

(a) $g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\,dt$.
Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{\cosh(t)}{t^2}$, d.h. $F'(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$g(x) = F(3x) - F(1).$$

Daraus folgt:

$$g'(x) = F'(3x) \cdot 3 = 3\frac{\cosh(3x)}{(3x)^2} = \frac{\cosh(3x)}{3x^2}\ .$$

(b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$.
Da $0 \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1$ konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium, dass auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$ konvergiert.
Benutze die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\
\Rightarrow 1 &= A(x+1) + Bx \\
\Rightarrow A &= 1 \text{ und } B = -1, \text{ d.h. } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{1}{x^2+x}dx &= \int_0^R \frac{1}{x}dx - \int_0^R \frac{1}{x+1}dx \\
&= \log(|x|)\big|_1^R - \log(|x+1|)\big|_1^R \\
&= \log(R) - \log(R+1) + \log(2) \\
&= \log\left(\frac{R}{R+1}\right) + \log(2) \overset{R\to\infty}{\to} \log(1) + \log(2) = \log(2).
\end{aligned}$$

Also $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx = \log(2)$ konvergiert.

15.33. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

Lösung. Es folgt

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1+a_n-1}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}.$$

Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert der Ausdruck rechts gegen $\frac{1}{2}$ und damit folgt die Behauptung.

15.34. Dezimaldarstellung reeller Zahlen Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in [0,1)$ gegeben. Definiere $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$x_1 := [bx], \qquad x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k b^{-k} \right) \right]$$

wobei für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq a\}$ die grösste ganze Zahl $\leq a$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

   a) $0 \leq x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$

   b) $x_n \in \{0, 1, 2, \cdots, b-1\}$

   und folgern Sie daraus $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$.

2. Interpretieren Sie das Resultat als Dezimalbruch im Fall $b = 10$.

Lösung.

1. Aus der Definition

   $$x_n := \left[b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) \right]$$

   folgt sofort

   $$0 \leq b^n \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) - x_n < 1.$$

   Dividieren wir diese Abschätzung durch b^n, so folgt

   $$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$$

   und das liefert (i). Falls wir diese Ungleichung wiederum mit b^{n+1} multiplizieren, so folgt

   $$0 \leq b^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{b^k} \right) < b$$

und somit
$$x_{n+1} := \left[b^{n+1} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} \right) \right] \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$
Das beweist (ii). Schliesslich folgt aus der Abschätzung $\left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} \right| < \frac{1}{b^n}$ sofort
$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k} =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}.$$

2. Sei $x \in [0, 1)$ eine reelle Zahl mit der Dezimaldarstelung $x = 0.864301....$ Dann entsprechen die Nachkommastellen genau der Folge x_k welche wir oben (für $b = 10$) konstruiert haben, d.h. $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, ... (Im Allgemeinen kann eine Zahl mehrere Dezimaldarstellungen besitzten, da z.B. $0.09999999... = 0.1$ gilt. So eine Mehrdeutigkeit existiert nur, wenn es eine Darstellung als endliche Dezimalzahl gibt. Unsere Konstruktion liefert in diesem Fall stets die endliche Darstellung, also $0.1 = 0.100000...$ anstelle von $0.0999999...$)

15.35. Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:
$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \tag{1}$$

1. Folgern Sie mit Hilfe des Leibnitz Kriteriums (Satz 2.7.12 in professor Marc Burger's skript) die Ungleichung:
$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \le \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass (2) auch für $x = 1$ gilt, und folgern Sie hieraus (3).

Lösung.

1. Für $0 < x < 1$ ist $(\frac{x^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ und es gilt die Restglied Abschätzung:
$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x)$ für $-1 < x < 1$ gilt. Die Restglied Abschätzung für $0 < x < 1$ ist folglich äquivalent zu
$$\left| \log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \le \frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

2. Da die linkte Seite von (3) in x stetig ist, erhalten wir

$$\left|\log(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \lim_{x\uparrow 1} \left|\log(x+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

und folglich

$$\log(2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

15.36. Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Tipp: *Berechne einen expliziten Ausdruck für die Potzenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ indem Sie den Differenzialoperator $x\frac{d}{dx}$ zwei mal auf die geometrische Reihe $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ anwenden.*

Lösung. Aus der Formel für die geometrischen Reihe folgt die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

wobei die Potenzreihe den Konvergenzradius 1 hat. Die Ableitung der Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzbereiches gegeben durch die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden. Wir erhalten somit

$$xf'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

Eine zweite Anwendung des Differenzialoperators $x\frac{d}{dx}$ liefert:

$$xf'(x) + x^2 f''(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ folgt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} f''\left(\frac{1}{2}\right).$$

Die Ableitungen berechnen wir als

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

und erhalten $f'(\frac{1}{2}) = 4$, $f''(\frac{1}{2}) = 16$ und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 2 + 4 = 6.$$

15.37. Taylorpolynom Berechnen Sie die Taylorapproximation bis auf 4 ordnung. Ordnung an der Stelle x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte:

(a) $\dfrac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0,$

(b) $\cosh x \quad \text{und} \quad \sinh x, \quad x_0 = 0$

(c) $\cos(e^{x^2} - 1), \quad x_0 = 0,$

(d) $\log(\cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

Lösung. Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion. Das Taylorpolynom ist

$$P_4(f, x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

(a) Wir berechnen:

$$f'(x) = -(1 + x)^{-2}, \qquad f''(x) = 2(1 + x)^{-3},$$
$$f'''(x) = -6(1 + x)^{-4}, \qquad f^{(4)}(x) = 24(1 + x)^{-5},$$

somit an der Stelle $x_0 = 0$ erhalten wir:

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

(b) Nach Definition gilt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{4}$$

somit erhalten wir:

$$\text{für jedes gerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \cosh x, \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \sinh x,$$
$$\text{für jedes ungerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \sinh x. \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \cosh x$$

Da $\sinh 0 = 0$ und $\cosh 0 = 1$ schliessen wir, dass

$$P_4(\cosh, 0)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{und} \quad P_4(\sinh, 0)(x) = x + \frac{x^3}{3!}.$$

(c) Wir können entweder die ersten vier Ableitungen berechnen, oder aber die Potenzreihenentwicklung von cos und e^x verwenden. Das Berechnen der Ableitungen ist v.a. für die höheren Ableitungen sehr aufwändig. Falls man dies trotzdem macht ergeben sich sehr lange Terme von denen fast alle in $x = 0$ Null sind und schliesslich ergibt sich:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = -12$$

und man kann

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$$

berechnen. Besser benutzt man die Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt (beachte: für $x = 0$ ist $e^{x^2} - 1 = 0$, deshalb müssen wir auch den cos um Null entwickeln). Da wir nur das Taylorpolynom 4. Ordnung von f berechnen wollen, brauchen wir auch nur die Tayolorpolynome der Ordnung 4.
Es ist:

$$P_4(\cos(y), 0)(x) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung von e^x erhalten wir

$$P_4(e^{x^2} - 1, 0)(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} - 1 = x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Damit gilt

$$P_4(\cos(P_4(e^{x^2} - 1, 0), 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{2}x^4)^2 + \frac{1}{4!} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}x^4)^4 = 1 - \frac{1}{2}x^4 \\ + \text{Potenzen höherer Ordnung}$$

Also ist das Taylorpolynom 4. Ordnung

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4.$$

(d) Wir erinnern uns die Identitäten $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \log\cos x,\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \log\cos(\frac{\pi}{4}\Big) = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\log 2,\\
f'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,\\
f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,\\
f''(x) &= -(1+\tan^2(x)),\\
f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -(1+\tan^2(\pi/4)) = -2,\\
f'''(x) &= -2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = -2\tan(x) - 2\tan(x)^3,\\
f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4,\\
f^{(4)}(x) &= -2(1+\tan(x)^2) - 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)),\\
f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4 - 12 = -16.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
P_4\left(f, \frac{\pi}{4}\right)(x) &= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + -\frac{2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{-16}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4\\
&= -\frac{1}{2}\log 2 - (x-\frac{\pi}{4}) - (x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4.
\end{aligned}
$$

15.38. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+e^x} \cos(e^{2t}+2t)\,dt, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Lösung.

Wie bekannt, lautet der Hauptsatz der Integralrechnung, dass für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in [a,b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Wir betrachten A als Komposition: $A = (\phi \circ \beta)(x)$, wobei

$$\phi(x) = \int_0^x \cos(e^{2t}+2t)\,dt \quad \text{und} \quad \beta(x) = x^7 + e^x.$$

Die Kettenregel und der Hauptsatz der Integralrechnung liefern demnach:

$$A'(x) = \phi'(\beta(x))\beta'(x) = \cos(\exp(2(x^7 + \mathrm{e}^x)) + 2(x^7 + \mathrm{e}^x))(7x^6 + \mathrm{e}^x).$$

Was B betrifft, so können wir uns wegen der Additivität des Integrals:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x^2+1}^{c} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (c \text{ belibig}),$$

B als

$$B(x) = (\phi_1 \circ \beta_1)(x) + (\phi_2 \circ \beta_2)(x)$$

denken, wobei

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \int_x^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, = -\int_c^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t & \beta_1(x) &= x^2 + 1, \\ \phi_2(x) &= \int_c^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, & \beta_2(x) &= x^2 + 5. \end{aligned}$$

Nochmals durch die Kettenregel und den Hauptsatz der Integralrechnung schliessen wir, dass

$$\begin{aligned} B'(x) &= \phi_1'(\beta_1(x))\beta_1'(x) + \phi_2'(\beta_2(x))\beta_2'(x) \\ &= -\frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}2x + \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}2x. \end{aligned}$$

15.39. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)

(a) Zu zeigen: für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, c]$ nach t integrierbar.

(b) Sei für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \int_{-\infty}^{x^3} \exp(-t^2)dt \tag{5}$$

Zu zeigen: f ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen der ersten Ableitung von f mit (5). Geben Sie an, ob es sich um lokale Minima oder lokale Maxima von f handelt.

(d) Bestimmen Sie alle intervalle auf denen f mit (5) konvex ist.

(e) Zeigen Sie, unter Benützung der Taylor-Approximation, dass es für jedes $x \in]0,1]$, ein $\eta \in]0,x[$ gibt so dass

$$\int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt = \frac{f''(\eta)x^2}{2}.$$

Wir definieren f mit (5).

Lösung.

(a) It suffices to show $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$, then $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,c]$ for any $c \leq -1$. Since $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-1,c]$ for any $c > -1$, $\exp(-t^2)$ is also integrable on $]-\infty,c]$ for any $c > -1$.
To show $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$, notice that $\exp(-t^2) < \exp(t)$ for any $t < -1$ and

$$\int_{-\infty}^{-1} \exp(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \exp(t)dt = \exp(-1).$$

Therefore $\exp(-t^2)$ is integrable on $]-\infty,-1]$.

(b) It suffices to show

$$t \to \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt$$

is twice-differentiable. By Theorem 5.4.6 (Substitution), we have

$$f(x) = \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt = \int_0^{x} \exp(-y^6)\cdot 3y^2dy.$$

Then by Theorem 5.4.1 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung), we have f is differentiable and its derivative is given by

$$f'(x) = 3x^2\exp(-x^6).$$

Since $x \to 3x^2\exp(-x^6)$ is differentiable, f is of C^2.

(c) Its derivative is given by

$$f'(x) = 3x^2\exp(-x^6).$$

Then f has only one critical point $x = 0$. Since $\exp(-t^2) > 0$ for any $t \in \mathbb{R}$, we know for any $\epsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{(-\epsilon)^3} \exp(-t^2)dt < \int_{-\infty}^{0} \exp(-t^2)dt < \int_{-\infty}^{\epsilon^3} \exp(-t^2)dt.$$

Therefore $x = 0$ is neither local minimum nor local maximum.

(d) We compute

$$f''(x) = 6x(1-3x^6)\exp(-x^6) = 6x(1-\sqrt{3}x^3)(1+\sqrt{3}x^3)\exp(-x^6).$$

Then we know

$$f'' \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left[0, 3^{-\frac{1}{6}}\right] \text{ or } x \in \left]-\infty, -3^{-\frac{1}{6}}\right].$$

(e) Since f is of C^2, we apply Theorem 4.4.5 (Taylor Approximation) to f at the point $x = 0$. Hence, for any $x \in]0,1]$, there exists $\eta \in]0, x[$ such that

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)x^2}{2}.$$

Notice that $f'(0) = 0$ and

$$f(x) - f(0) = \int_0^{x^3} \exp(-t^2)dt.$$

15.40. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK) Wir definieren folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Benützen Sie die Taylor Approximation im Punkt $x_0 = 1$ zur dritten Ordnung, um eine Approximation von $(\frac{7}{5})^{\frac{7}{5}}$ anzugeben.

Lösung.

(a) Because x^x is continuous for $x > 0$, $(-x)^{-x}$ is continuous for $x < 0$ and it suffices to prove $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

We have

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{y\to +\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0 \quad \to \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = 1$$

Since this function is even (or do the same computation), we have

$$\lim_{x\to 0^-} x^x = 1$$

(b) Compute the derivatives

$$f'(x) = (1 + \ln x)x^x$$
$$f''(x) = (1 + \ln x)^2 x^x + \frac{x^x}{x}$$
$$f'''(x) = (1 + \ln x)^3 x^x + \frac{3(1 + \ln x)x^x}{x} - \frac{x^x}{x^2}$$

then

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \quad \text{for } x \text{ close to } 1$$

then

$$f\left(\frac{7}{5}\right) \approx 1 + \left(\frac{7}{5} - 1\right) + \frac{2}{2}\left(\frac{7}{5} - 1\right)^2 + \frac{3}{6}\left(\frac{7}{5} - 1\right)^3 = \frac{199}{125}$$

15.41.

Stellen Sie $(1 + e^x)^3$ als Potenzreihe dar.

Lösung.

Zuerst multiplizieren wir aus:

$$(1 + e^x)^3 = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}.$$

Es ist ein allgemeiner Fakt, dass für zwei konvergente Reihen $\sum_n b_n = b$ und $\sum_n c_n = c$, die Reihe $\sum_n (b_n + c_n)$ ebenfalls konvergiert mit Grenzwert $b + c$. Also können wir die Potenzreihen der einzelnen Summanden oben aufstellen und dann addieren:

$$(1 + e^x)^3 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{x^n}{n!} + 3\frac{2^n x^n}{n!} + \frac{3^n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 + 3 \cdot 2^n + 3^n)}{n!} \cdot x^n.$$

Also gilt

$$(1 + e^x)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ mit } a_n = \begin{cases} 8, & n = 0 \\ \frac{3+3\cdot 2^n+3^n}{n!}, & n \geq 1. \end{cases}$$

15.42.

Berechne

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

Lösung.

Wir substituieren zuerst mit $y = x^2$ (und somit $dy = 2xdx$) und verwenden danach eine partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{-x^2}\,dx &= \int \frac{x^2 e^{-x^2}}{2} 2x\,dx \\
&= \int \frac{ye^{-y}}{2}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left((-e^{-y})y + \int e^{-y}\cdot 1\,dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{-y}y - e^{-y}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right) + C.
\end{aligned}$$