Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Welche der Aussagen ist richtig?

- ☐ Eine Folge kann höchstens ein Grenzwert haben.
- ☐ Jede monotone und von oben beschränkte Folge ist konvergent.
- ☐ Es gibt konvergente Folgen, die nicht beschränkt sind.
- ☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$.

- ☐ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt:
$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$
- ☐ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$
- ☐ Falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.
- ☐ Falls (c_n) konvergiert, konvergiert mindestens eine der Folgen (a_n) und (b_n).

(c) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

- ☐ Falls $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$
gilt, dann konvergiert (a_n).
- ☐ Falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent.
- ☐ Falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent.
- ☐ Falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a$ $\forall n \geq 1$, und $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq 1$, dann ist (a_n) konvergent.

2.2. Äquvalente Definitionen der Konvergenz. Sei (a_n) eine reelle Folge und sei $L \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle ε ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\}$ endlich;

(ii) Für alle ε existiert $N_\varepsilon \geq 1$, so dass $|a_n - L| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt.

***2.3. Grenzwert I.** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Der Binomialsatz könnte nützlich sein.

2.4. Grenzwert II. Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschraňkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

***(a)** $a_n = \dfrac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5}$;

***(b)** $b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$;

(c) $c_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n}$;

(d) $d_n = \left(\dfrac{n}{n^2} + \dfrac{n+1}{n^2} + \cdots + \dfrac{3n}{n^2}\right)$;

***(e)** $e_n = \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n}$.

2.5. Divergente Folgen. Finden Sie Beispiele für reelle Folgen (x_n) und (y_n), so dass $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ und

(a) $x_n + y_n \to +\infty$;

(b) $x_n + y_n \to -\infty$;

(c) $(x_n + y_n)$ konvergiert;

(d) $(x_n + y_n)$ beschränkt ist und divergiert.