Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

4.1. MC Fragen.

(a) Sei $X_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ und $Y_n = [n, +\infty)$ für $n \geq 1$. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $X_n \supseteq X_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$;
- ☐ $\bigcap_{n\geq 1} X_n \neq \emptyset$;
- ☐ $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$;
- ☐ $\bigcap_{n\geq 1} Y_n = \emptyset$.

(b) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge (S_m) der Partialsummen $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergiert.
- ☐ Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe ist, wobei $0 \leq b_n \leq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

***4.2. Limit-Vergleichssatz** Sei (a_n) und (b_n) zwei Folgen, wobei $a_n, b_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es existiert eine reelle Zahl $l > 0$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = l$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $N > 0$, wobei $\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n$ für jedes $n > N$, gibt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(c) Das Obenstehende gilt nicht, wenn $a_n/b_n \to 0$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem $a_n, b_n > 0$, $a_n/b_n \to 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

***4.3. Reihe I.** Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen. Wenn die Reihe konvergiert, berechnen Sie den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{n-2}}{3^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+2}$.

4.4. Reihe II. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergent, mit $a_k \geq 0, \forall k \geq 1$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

konvergiert.