Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

☐ $\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n \to +\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ $\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n \to +\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ $\limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \to +\infty} |b_n|^{1/n}$.

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

☐ konvergiert nicht unbedingt.

☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.

☐ konvergiert immer absolut.

☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(c) Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert und dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

- ☐ konvergiert nicht unbedingt.
- ☐ konvergiert immer, aber konvergiert nicht unbedingt absolut.
- ☐ konvergiert immer absolut.
- ☐ keine der obigen Aussagen trifft zu.

5.2. Wurzelkriterium „starker" als Quotientkriterium. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf |a_n|^{1/n} \leq \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

***5.3. Reihen I** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!\sin(n^{17})}{(3n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2^n}{3^n}$

***5.4. Reihen II** Finden Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n.$$