

Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

6.1. MC Fragen: Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Kreuze die richtigen Aussagen an.

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.
- Angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ monoton wachsend.
- Angenommen, $f(x), g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ oder $\frac{g}{f}$ monoton wachsend.

(b) Kreuze die richtigen Aussagen an. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig bei $x_0 = 0$ ist mit $f(x_0) > 0$.

- Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$ so dass $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt.
- Es gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Beide obige Aussagen sind falsch.

(c) Kreuze die richtigen Aussagen an.

- $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt $\implies f$ monoton.
- $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend $\implies f$ stetig.
- $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ beschränkt.
- $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ beschränkt.

(d) Die Aufrundungsfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x] := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ ist im Punkt $x = 2$

- stetig.
- unstetig.
- Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

***6.2. Cauchy Produkt.** Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ wobei $|x| < 1$ Folgendes gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

***6.3. Stetigkeit I.** Zeigen Sie direkt aus der ε - δ Definition, dass

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$$

in jedem Punkt stetig ist.

6.4. Stetigkeit II. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nur in $x = 0$ stetig ist.