Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

7.1. MC Fragen.

(a) Wählen Sie alle Funktionen, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig sind.

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{(4x-6)^{12} + x^4}{x^2+1};$

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{x};$

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|;$

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \operatorname{sign}(x)$, wobei

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x| \cdot \operatorname{sign}(x).$

(b) Sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

☐ Falls I kompakt ist, ist auch $f(I)$ kompakt.

☐ Falls I kompakt ist, ist $f(I)$ nicht unbedingt kompakt.

☐ Falls $f(I)$ kompakt ist, ist auch I kompakt.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? In allen Fällen seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.

***7.2. Umkehrfunktion.** Analysiere folgende Funktionen auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimme die Inverse Funktion.

(a) $f(x) = 4 \cdot \ln(x+7) + 3$ für $x \in (-7, +\infty)$,

(b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

7.3. Zwischenwertsatz II. Beweisen Sie, dass am Äquator der Erde es immer zwei gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur gibt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Temperatur durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann, und betrachten Sie die Temperaturdifferenz zwischen Antipodenpunkten auf einem Grosskreis.

***7.4. Surjektivität von x^n.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \qquad x \mapsto x^n$$

surjektiv ist.