Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

8.1. MC Fragen.

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n \colon D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetigen Funktionen. Wählen Sie die richtige Aussagen.

- ☐ Falls f_n nach f gleichmässig konvergiert, konvergiert f_n nach f punktweise.
- ☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für $c_n \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in D$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.
- ☐ Falls $|f_n(x)| < c_n$ für jedes $x \in D$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ punkteweise.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Telmenge. Der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von D, falls

- ☐ $x_0 \in D$;
- ☐ für jedes $\delta > 0$ gilt es $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$;
- ☐ für jedes $\delta > 0$ gilt es $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \neq \emptyset$.

(c) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- ☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.
- ☐ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

***8.2. Konvergenz von Funktionenfolgen.** Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f? Falls ja, bestimmen Sie f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N};$

(b) $f_n(x) := \frac{\sin x}{n};$

(c) $f_n(x) := 1 + x^n(1 - x)^n, \quad n \in \mathbb{N};$

***8.3. Gleichmässigkonvergenz.** $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ sei beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und f_n konvergiere gleichmässig gegen f auf D. Dann zeigen Sie, dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

8.4. Trigonometrische Funktion.

(a) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

(b) Zeige dass $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ eine strong monoton stetige bijektive Abbildung ist.

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}$$