Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

9.1. MC Fragen.

(a) Sei $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Wählen Sie die richtige Antwort.

- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existiert nicht

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und nehmen Sie an, dass es $m \in \mathbb{R}$ und $r\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion gibt, so dass $r(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0),$$

wobei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D ist. Ist f in x_0 differenzierbar?

- ☐ Ja
- ☐ Nein
- ☐ Nicht genügend Informationen, um festzustellen.

(c) Definiere für $x > 0$

$$f(x) := \liminf_{k \to \infty} \left(\min\{x, x^{-1}\}\right)^k.$$

Dann

- ☐ f ist stetig und differenzierbar
- ☐ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ☐ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ☐ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

***9.2. Link- und Rechtseitige Grenzwert.** Bestimmen Sie die Link- und die Rechtseitige Grenzwerte von

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot \cos^2(x)$$

in $x = 0$. Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$? Falls ja, bestimmen Sie diese Wert. Falls nein, erklären Sie warum. Ist f eine stetige Funktion?

***9.3. Ableitung I.** Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\tan(x))$.

(b) $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{x^a}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl ist.

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, x^{x^a} als $x^{x^a} = e^{\ln x^{x^a}}$ zu schreiben.

9.4. Ableitung II.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in R$ differenzierbar ist. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Berechne

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-2)h)}{h}.$$

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade* (resp. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige: falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass gilt:

(i) f gerade $\implies$ f' ungerade.

(ii) f ungerade $\implies$ f' gerade.