Nur die Aufgaben mit einem * werden korrigiert.

13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐ $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$

☐ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$

☐ $\displaystyle\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$

☐ $\displaystyle\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$

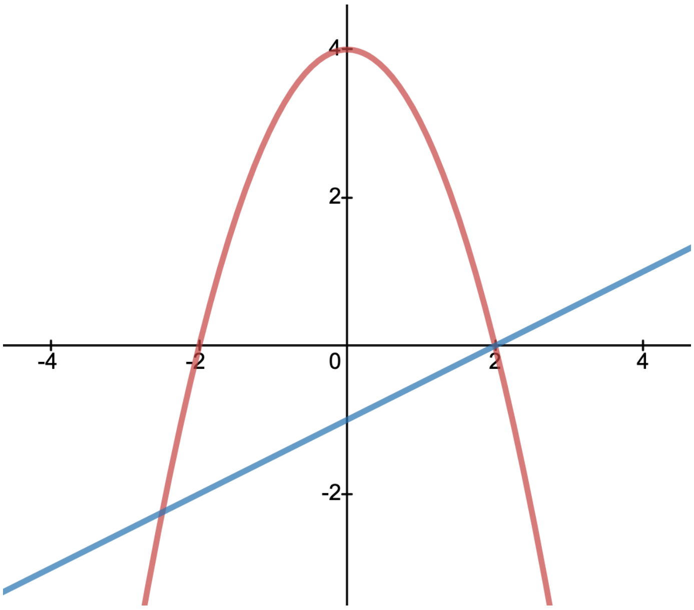
(b) Die Ableitung nach x von $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

☐ $g'(x) = \displaystyle\int_{2x}^0 \sin^2(t)\cos^2(t)dt.$

☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

☐ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

***13.2. Flächeninhalt einer Form.** Berechnen Sie die Fläche, die durch die lineare Funktion (blau) und die quadratische Funktion (rot) begrenzt ist, wie im Bild unten gezeigt.



13.3. Integration I. Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p \,(1-x)^q \, dx\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$I(p,q) = \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!}$$

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

13.4. Integration II. Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

***(a)** $\displaystyle\int_1^7 \frac{4-x^3+x}{x}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_1^2 (x^{2/3}-2)\,(x^2+3)\,\mathrm{d}x;$

***(c)** $\displaystyle\int \cos(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x;$

***(d)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t;$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$

(f) $\displaystyle\int (x^4+4x+4)^{2022}(4x^3+4)\,\mathrm{d}x;$

***(g)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{6x}\cdot\sin(3x)\,\mathrm{d}x;$

(h) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{3+4x^2}}\,\mathrm{d}x.$