Die Aufgaben aus dieser Serie werden nicht korrigiert.

14.1. MC Fragen.

Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$.

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

- ☐ f monoton fallend ist.
- ☐ $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.
- ☐ f beschränkt ist.

(b) Gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}?$$

- ☐ Ja.
- ☐ Nein.

(c) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \dfrac{j}{n} \leq x < \dfrac{j+1}{n} \\ \dots & \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \dfrac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) $\exists\, x_0 \in\,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

☐ Richtig.

☐ Falsch.

(ii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen g.

☐ Richtig.

☐ Falsch.

(iii) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

☐ Richtig.

☐ Falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und g sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

☐ Richtig.

☐ Falsch.

14.2. Partialbruchzerlegung. Berechnen Sie

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+2)}dx.$$

14.3. Euler Funktion. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

(a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, genau dann, wenn $s > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ für jede s konvergiert.

Dies zeigt, dass $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ für jede $s > 0$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2)$ gilt.

Hinweis: Schreiben Sie $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Verwenden Sie die Substitution $v = t^2$.

14.4. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x;$

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t;$

(h) $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x;$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t.$