Die Aufgaben aus dieser Serie werden nicht korrigiert.

**15.1. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)** Seien

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \text{ oder } x > 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$$

und

$$a_k = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)dx$$

wobei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl bezeichnet. Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) $f$ ist stetig, aber $f$ ist nicht glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) $f$ besitzt unendlich viele lokale Minimalstellen.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) $f$ besitzt ein lokales Maximum in $x = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $a_1 > 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

**15.2. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)** Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \geq 1$ so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmässig gegen $f$ konvergiert. Geben Sie für jede folgender Aussagen an ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Sei $x_0 \in \,]a, b[$ . Falls $f_n$ für alle $n \geq 1$ in $x_0$ differenzierbar ist, so ist $f$ in $x_0$ differenzierbar.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) Falls $f_n$ für alle $n \geq 1$ auf $[a, b]$ beschränkt ist dann folgt, dass für jede Partition $P$ von $[a, b]$ der Grenzwert der Untersumme $\lim_{n\to\infty} s(f_n, P)$ existiert und

$$\lim_{n\to\infty} s(f_n, P) = s(f, P).$$

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Falls $f_n$ für alle $n \geq 1$ stetig ist, so ist $f$ gleichmässig stetig.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) Falls $f_n$ für alle $n \geq 1$ konvex ist, so ist $f$ konvex.

(A) wahr.

(B) falsch.

**15.3. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)** Sei

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x)\sin(2\pi x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von auf $[0,1]$ definierten Funktionen gegeben durch

$$g_1(x) = \inf_{0\leq t\leq 1} g(t),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\leq t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\leq t<\frac{2}{n}} g(t), & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n} \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \dfrac{j}{n} \leq x < \dfrac{j+1}{n} \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\leq t\leq 1} g(t), & \dfrac{n-1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 2.$$

Beachten, dass $\inf\limits_{\frac{j}{n}\leq t<\frac{j+1}{n}} g(t)$ in der Definition der zur Partition $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ gehörenden Untersumme vorkommt.

(i) $g$ ist glatt.

(A) wahr.

(B) falsch.

(ii) $\exists\, x_0 \in \,]0,1[$ mit $g'(x_0) = 0$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iii) Die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen $g$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(iv) $(g_n)_{n\geq 1}$ und $g$ sind integrierbar und

$$\int_0^1 g_n(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

für jedes $n \geq 1$.

(A) wahr.

(B) falsch.

(v) $(g_n)_{n\geq 1}$ und $g$ sind integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

(A) wahr.

(B) falsch.

**15.4.** Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)(n+2)}$ , $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist divergent.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

**15.5.** Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt $f$ im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle $\xi$.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt $f$ im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle $\xi$.

(c) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt $f$ im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle $\xi$.

(d) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt $f$ im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle $\xi$.

**15.6.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x x^3 \ln x$. Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

(a) $x^2(3\ln x + x\ln x)e^x$

(b) $x^2(3\ln x + 1)e^x$

(c) $x^2(3\ln x + 1 + x\ln x)e^x$

(d) $3x^2$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

**15.7.** Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) $-\log : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

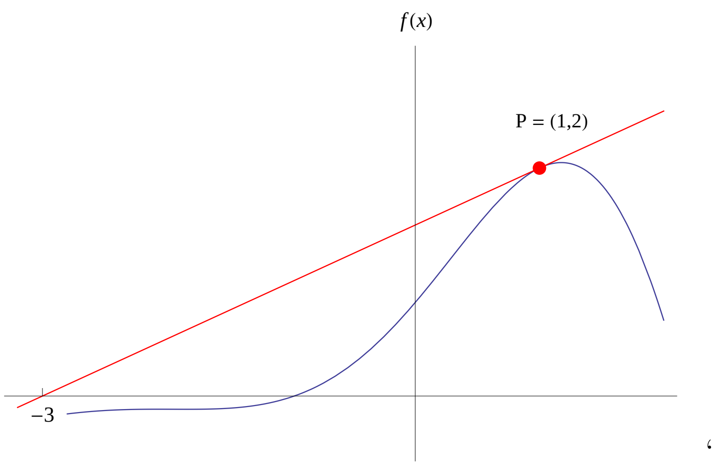
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

**15.8.** Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen $f, g$ notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

**15.9.** Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt $P$ tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung $f'$ an der Stelle 1?



(a) $2$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) $-2$

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

**15.10.** Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f : [2, \infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-2)^{\frac{1}{3}},$$

an der Stelle $x = 10$?

(a) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

(b) $y = \frac{1}{12}x + \frac{7}{6}$.

(c) $y = \frac{1}{12}x + 2$.

(d) $y = \frac{1}{4}x + 2$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

**15.11.** Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in ]0, \infty[$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = x^2$.

(d) $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

(e) $f'(x) = x + x \log x$.

(f) keiner der obigen Ausdrücke.

**15.12.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) $f$ hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist $\geq 0$, aber nicht notwendig $> 0$.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion $f$ dar.

(d) Wenn $f$ durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

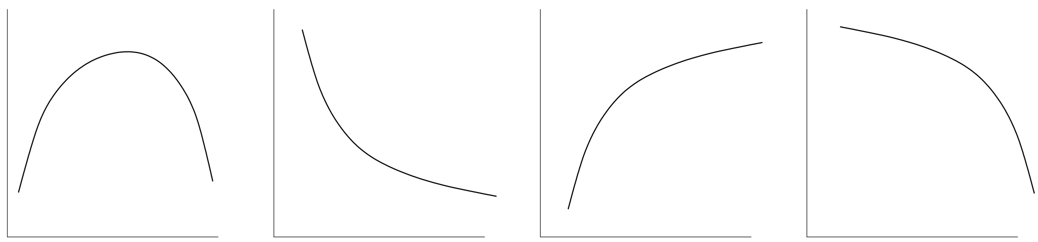
**15.13.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

(c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

**15.14.** Sei $f$ eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen $G_f$ von $f$ beschreiben?



I II III IV

(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) Keine.

**15.15.** Sei

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von $f$ auf $[0, 6]$.

(c) $-16$ ist das globale Minimum von $f$ auf $[0, 6]$.

(d) 6 ist eine globale Maximalstelle von $f$ auf $[0,6]$.

(e) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

**15.16.** Bestimmen Sie das globale Maximum von $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$.

(a) 2.61

(b) 1.73

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

**15.17.** Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \cos(x^2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist $f$ auf dem Definitionsbereich $D$ injektiv.

(b) Das Bild von $D$ unter $f$, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von $f$ im Intervall $[1/\sqrt{2}, 1]$.

**15.18.** Sei $0 < \alpha < 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - \alpha \sin x$. Welche der Aussagen gilt?

(a) $f$ ist strikt monoton wachsend.

(b) $f$ ist konvex.

(c) Die Umkehrfunktion $g$ von $f$ erfüllt $g'(0) = (1-\alpha)^{-1}$.

**15.19.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

(a) Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(d) $f$ ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

**15.20.** Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

(b) $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$

(c) $\int_0^{\infty} |\cos(x^2)| dx$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(e) $\int_0^{\infty} x\cos(x^4) dx$

**15.21. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)** Sei $c \in [0, \pi]$ beliebig, sei $(a_k)_{k\geq 1}$ die rekursiv definierte Folge:

$$\begin{aligned} &a_1 = c, \\ &a_{k+1} = \sin(a_k), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Zeige Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

**15.22.**

**(a)** **(Prüfung FS 2015)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{1+i}{2+3i} \cdot e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2}$$

in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

**(b)** **(Prüfung HS 2016)** Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

**15.23.**

**(a)** (**Prüfung FS 2011**) Brechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

**(b)** (**Prüfung FS 2011**) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$.

**(c)** (**Prüfung HS 2013**) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n},\ n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

**(d)** Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

**15.24.**

**(a)** (**Prüfung FS 2014**) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

**(b)** Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

**(c)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

**15.25.**

**(a)** **(Prüfung FS 2015)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n + 3}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

**(b)** **(Prüfung HS 2016)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

**15.26.**

**(a)** **(Prüfung FS 2015)** Bestimmen Sie die ersten zwei **nicht** verschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

**(b)** **(Prüfung HS 2016)** Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

durch eine Potenzreihe in $x$ dar.

**15.27.** Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0,2[, \\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2,4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von $f$.

**15.28.**

**(a)** **(Prüfung HS 2010)** Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x .$$

**(b)** **(Prüfung FS 2010)** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot(1-\cos(x))}{x\cdot \sin(x)}.$$

**(c)** **(Prüfung FS 2011)** Bestimmen Sie die Werte von den reellen Parametern $a$ und $b$ so, dass der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$$

existiert und bestimmen Sie den Limes in diesem Fall.

**15.29.**

**(a)** **(Prüfung HS 2010)** Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

**(b)** **(Prüfung FS 2010)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1}.$$

**(c)** **(Prüfung FS 2011)** Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

**(d)** **(Prüfung HS 2011)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 1}.$$

**(e)** **(Prüfung HS 2009)** Bestimmen Sie die Menge **aller** $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+4} \cdot x^n$$

konvergiert.

**15.30.** **(Prüfung HS 2009)**

**(a)** Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^{(x^2)}, \quad x > 0$$

sowie

$$(f^{-1})'(2).$$

**(b)** Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(e^{i\pi/4} \cdot z) < \sqrt{2}\}.$$

**(c)** Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.
Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

**15.31.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

**(a)**

$$\int e^{-2x} \sin(6x)\, dx \ .$$

**(b)**

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx \ .$$

**(c)**

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx \ .$$

**15.32.**

**(a)** (Basisprüfung D-INFK Winter ’15) Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

**(b)** Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x}\, dx$$

konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals. Es wird in dieser Teilaufgabe erwartet, dass Sie verwendete Stammfunktionen **selbst** berechnen.

**15.33.** Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

**15.34. Dezimaldarstellung reeller Zahlen** Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in [0,1)$ gegeben. Definiere $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ rekursiv durch

$$x_1 := [bx], \qquad x_n := \left[ b^n \left( x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k b^{-k} \right) \right]$$

wobei für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq a\}$ die grösste ganze Zahl $\leq a$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

   a) $0 \leq x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{b^k} < \frac{1}{b^n}$

   b) $x_n \in \{0, 1, 2, \cdots, b-1\}$

   und folgern Sie daraus $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}$.

2. Interpretieren Sie das Resultat als Dezimalbruch im Fall $b = 10$.

**15.35.** Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots \tag{1}$$

1. Folgern Sie mit Hilfe des Leibnitz Kriteriums (Satz 2.7.12 in professor Marc Burger's skript) die Ungleichung:

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{für } 0 < x < 1. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass (2) auch für $x = 1$ gilt, und folgern Sie hieraus (1).

**15.36.** Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

**Tipp:** *Berechne einen expliziten Ausdruck für die Potzenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ *indem Sie den Differenzialoperator* $x\frac{d}{dx}$ *zwei mal auf die geometrische Reihe* $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *anwenden.*

**15.37. Taylorpolynom** Berechnen Sie die Taylorapproximation bis auf 4 ordnung. Ordnung an der Stelle $x_0$ für die folgenden Funktionen und Punkte:

**(a)** $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0,$

**(b)** $\cosh x \quad \text{und} \quad \sinh x, \quad x_0 = 0$

**(c)** $\cos(\mathrm{e}^{x^2} - 1), \quad x_0 = 0,$

**(d)** $\log(\cos x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

**15.38. Durch Integrale definierte Funktionen** Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+\mathrm{e}^x} \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\,\mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**15.39. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)**

**(a)** Zu zeigen: für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-t^2)$ auf $]-\infty, c]$ nach $t$ integrierbar.

**(b)** Sei für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \int_{-\infty}^{x^3} \exp(-t^2) dt \tag{3}$$

Zu zeigen: $f$ ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

**(c)** Bestimmen Sie alle Nullstellen der ersten Ableitung von $f$ mit (3). Geben Sie an, ob es sich um lokale Minima oder lokale Maxima von $f$ handelt.

**(d)** Bestimmen Sie alle intervalle auf denen $f$ mit (3) konvex ist.

**(e)** Zeigen Sie, unter Benützung der Taylor-Approximation, dass es für jedes $x \in ]0,1]$, ein $\eta \in ]0, x[$ gibt so dass

$$\int_0^{x^3} \exp(-t^2) dt = \frac{f''(\eta) x^2}{2}.$$

Wir definieren $f$ mit (3).

**15.40. (Prüfung 2019, 2020, D-INFK)** Wir definieren folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ (-x)^{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $f$ stetig ist.

**(b)** Benützen Sie die Taylor Approximation im Punkt $x_0 = 1$ zur dritten Ordnung, um eine Approximation von $(\frac{7}{5})^{\frac{7}{5}}$ anzugeben.

**15.41.**

Stellen Sie $(1+e^x)^3$ als Potenzreihe dar.

**15.42.**

Berechne

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$$