Analysis I

Prof. Marc Burger

Frühjahrssemester 2019

ETH Zürich

June 19, 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen **3**
- 1.1 Der Körper der reellen Zahlen . . . 3
- 1.2 Der Euklidische Raum . . . 11
- 1.3 Komplexe Zahlen . . . 13

2 Folgen und Reihen **16**
- 2.1 Grenzwert einer Folge . . . 16
- 2.2 Der Satz von Weierstrass und Anwendungen . . . 19
- 2.3 Limes superior und Limes inferior . . . 23
- 2.4 Das Cauchy Kriterium . . . 23
- 2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass . . . 25
- 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$ . . . 30
- 2.7 Reihen . . . 31

3 Stetige Funktionen **48**
- 3.1 Reellwertige Funktionen . . . 48
- 3.2 Stetigkeit . . . 50
- 3.3 Der Zwischenwertsatz . . . 54
- 3.4 Der Min-Max Satz . . . 57
- 3.5 Der Satz über die Umkehrabbildung . . . 62
- 3.6 Die reelle Exponentialfunktion . . . 63
- 3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 68
- 3.8 Trigonometrische Funktionen . . . 73
- 3.9 Die Kreiszahl π . . . 75
- 3.10 Grenzwerte von Funktionen . . . 78

4 Differenzierbare Funktionen **82**
- 4.1 Die Ableitung: Definition und elementare Folgerungen . . . 82
- 4.2 Zentrale Sätze über die (erste) Ableitung . . . 91
- 4.3 Höhere Ableitungen . . . 103
- 4.4 Potenzreihen und Taylor Approximation . . . 106

5 Das Riemann Integral **111**
- 5.1 Definition und Integrabilitätskriterien . . . 111
- 5.2 Integrierbare Funktionen . . . 118
- 5.3 Ungleichungen und der Mittelwertsatz . . . 123
- 5.4 Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung . . . 126
- 5.5 Integration konvergenter Reihen . . . 132
- 5.6 Euler-McLaurin Summationsformel . . . 136
- 5.7 Stirling'sche Formel . . . 142
- 5.8 Uneigentliche Integrale . . . 147
- 5.9 Das unbestimmte Integral . . . 156

A Der Binomialsatz **165**

1 Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen

1.1 Der Körper der reellen Zahlen

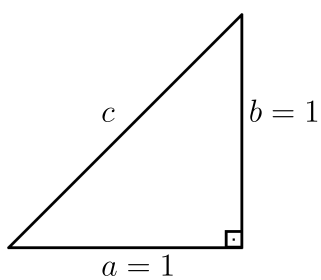
Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Natürliche Zahlen kann man addieren und multiplizieren. Dagegen hat die Gleichung $x + 1 = 0$ in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Dieses Problem löst man, in dem man die Menge der ganzen Zahlen einführt:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

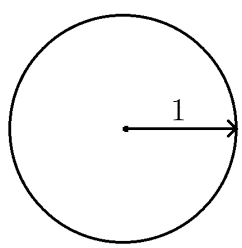
Die Gleichung $2x = 1$ hat in $\mathbb{Z}$ keine Lösung. Man erweitert deswegen $\mathbb{Z}$ zur Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \right\}.$$

Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ besitzt dann eine eindeutige Darstellung $r = \frac{p}{q}$ mit $q > 0$, p und q teilerfremd.
Die Menge der rationalen Zahlen genügt bei weitem nicht, um die elementarsten geometrischen Probleme zu lösen:



$c^2 = a^2 + b^2 = 2$
hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$.



Kreisumfang $L = 2\pi \notin \mathbb{Q}$

Satz 1.1 (Lindemann 1882)**.** *Es gibt keine Gleichung der Form*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

mit $a_i \in \mathbb{Q}$, *so dass* $x =$ "π" *eine Lösung ist.*

Wir werden später beweisen, dass $\sqrt{2}$ und π reelle Zahlen sind; für π siehe Abschnitt 3.9.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen entsteht durch einen Vervollständigungsprozess von $\mathbb{Q}$, den wir überspringen. Wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und beschreiben dessen grundlegende Eigenschaften.
Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit zwei Operationen versehen:

$$\textbf{Addition:} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$
$$\textbf{Multiplikation:} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$$

und einer

$$\textbf{Ordnungsrelation: } \leq$$

für welche gilt:

Satz 1.2. $\mathbb{R}$ *ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist.*

Wir werden jetzt diese Eigenschaften im Detail besprechen. Es gibt zwei ausgezeichnete Elemente $0,\ 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$.

Axiome der Addition

A1	Assoziativität	$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
A2	Neutrales Element	$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
A3	Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \quad x + y = 0$
A4	Kommutativität	$x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

Bemerkung 1.3. In A3 ist y eindeutig bestimmt und wird mit $-x$ bezeichnet.

Axiome der Multiplikation

M1	Assoziativität	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
M2	Neutrales Element	$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
M3	Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R}: \quad x \cdot y = 1$
M4	Kommutativität	$x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$

Bemerkung 1.4. In M3 ist y eindeutig bestimmt und wird mit x^{-1} bezeichnet.

D	Distributivität	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Ordnungsaxiome

O1	Reflexivität	$x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
O2	Transitivität	$x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$
O3	Antisymmetrie	$x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$
O4	Total	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist mit den Körperaxiomen kompatibel:

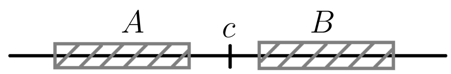
Kompatibilität

K1	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z$
K2	$\forall x \geq 0, \quad \forall y \geq 0: \quad x \cdot y \geq 0$

Bemerkung 1.5. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen versehen mit Addition, Multiplikation und Ordnung $\leq$ genügt den obigen Axiomen.

Was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet ist die **Ordnungsvollständigkeit V**:

Ordnungsvollständigkeit

> Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass
>
> (i) $A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$
>
> (ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$
>
> Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A : a \leq c$ und >: $\forall b \in B : c \leq b$.
>
> 
>

Wir betrachten jetzt einige Folgerungen obiger Axiome:

Notation. $a > b \iff a \geq b$ und $a \neq b$.

Korollar 1.6.

1. *Eindeutigkeit der additiven und multiplikativen Inverse.*
2. $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, *insbesondere* $(-1)^2 = 1$
4. $y \geq 0 \iff (-y) \leq 0$
5. $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, *insbesondere* $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$
6. $x \leq y$ *und* $u \leq v \implies x + u \leq y + v$
7. $0 \leq x \leq y$ *und* $0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$

Beweis.

1. Übung.
2.

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 && \text{A2} \\
\underbrace{(0+0) \cdot x} &= 0 \cdot x \qquad \forall x \in \mathbb{R} && \\
0 \cdot x + 0 \cdot x &= 0 \cdot x && \text{D} \\
\underbrace{(0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x)} &= 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 && \text{(A3)} \\
0 \cdot x + \underbrace{(0 \cdot x + (-0 \cdot x))}_{0} &= 0 && \text{(A1)} \\
& && \text{(A3)} \\
\underbrace{0 \cdot x + 0} &= 0 && \\
0 \cdot x &= 0 && \text{(A2)}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x &= (1 + (-1)) \cdot x && \text{(D)} \\
&= 0 \cdot x = 0 && \text{(2)} \\
x + (-1) \cdot x = 0 \implies (-1) \cdot x &= -x
\end{aligned}
$$

4.

$$
y \geq 0 \implies \underbrace{y + (-y)}_{0} \geq 0 + (-y) \iff 0 \geq -y \qquad \text{(K2)}
$$

5. Falls $y \geq 0$ so folgt aus K2: $y^2 = y \cdot y \geq 0 \cdot 0 = 0$
   Falls $y \leq 0$ folgt aus (4): $-y \geq 0$ und somit $(-y)^2 \geq 0$. Unter Benützung von (3) folgt dann:
$$0 \leq (-y)^2 = (-y)(-y) = (-1)y(-1)y = (-1)^2 y^2 = y^2$$

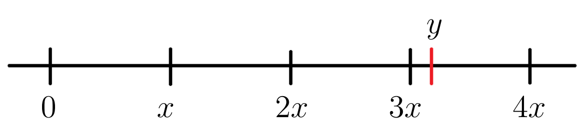
6. Übung.

7. Übung.

$\square$

Folgende Folgerung zeichnen wir speziell aus:

Korollar 1.7 (Archimedisches Prinzip)**.**
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.



Beweis. Sei $r = yx^{-1}$. Es bleibt zu zeigen: $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$.
Beweis durch Widerspruch.
Annahme: $\forall m \in \mathbb{N} : \ m \leq r$.
Sei $A = \mathbb{N}$ und $B = \{y \in \mathbb{R} : \ m \leq y \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $r \in B$ und aus (V) folgt:

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \text{mit:} \quad \text{(i) } m \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad\qquad \text{(ii) } c \leq y \quad \forall y \in B.$$

Aus (i) folgt $m+1 \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$, das heisst $m \leq c-1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, woraus $c-1 \in B$ folgt. Dann folgt aus (ii) $c \leq c-1 \iff 1 \leq 0$; ein Widerspruch. Die Annahme führt also zu einem Widerspruch, daher ist sie falsch. $\square$

Ordnungsvollständigkeit sowie das Archimedische Prinzip benützen wir jetzt um folgende grundlegende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ zu zeigen:

Satz 1.8. *Für jedes $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.*

Bemerkung. Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet.

Beweis. Für $t = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $t > 0$. Wir definieren:

$$A = \{y \in \mathbb{R} : \ y \geq 0, \ \ y^2 \leq t\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{R} : \ z > 0, \ \ z^2 \geq t\}$$

und möchten das Ordnungsvollständigkeitsaxiom V auf A und B anwenden.
Wir müssen zeigen, dass die Voraussetzungen V(i) und V(ii) erfüllt sind.
Zu V(i): $A \neq \emptyset$ denn $0 \in A$.
$B \neq \emptyset$: Sei (Archimedes) $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $n \geq t$. Aus K2 angewendet auf $n \geq 1$ und $n \geq t$ folgt nun: $n^2 \geq t \cdot 1 = t$ und somit folgt nun, dass $n \in B$.
Zu V(ii): $\forall y \in A, \ \ \forall z \in B$ gilt: $y^2 \leq t \leq z^2$. Insbesondere folgt:

$$(z-y)(z+y) = z^2 - y^2 \geq 0$$

Aus $z + y \geq z > 0$ und K2 folgt $z - y \geq 0$, und A und B erfüllen also V(ii).
Nach **V** gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit: $y \leq c \leq z \quad \forall y \in A, \ \ \forall z \in B$. Mehrfache Anwendung von Folgerung 1.6(7) ergibt $y^2 \leq c^2 \leq z^2$.
Wir zeigen nun, dass $c^2 \geq t$ und $c^2 \leq t$ woraus dann $c^2 = t$ folgen wird.
$\boldsymbol{c^2 \geq t}$ **:** Wir nehmen an, $c^2 < t$. Insbesondere folgt $c \in A$. Da $t - c^2 > 0$ und $2c+1 \geq 1 \geq 0$ gibt es nach Archimedes $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1$ mit

$$2c + 1 \leq n(t - c^2).$$

Mit dieser Wahl von n folgt:

$$\begin{aligned}\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 &= c^2 + 2c \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq c^2 + 2c\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= c^2 + (2c+1) \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq c^2 + t - c^2 = t.\end{aligned}$$

Dies zeigt dann, dass $c + \frac{1}{n} \in A$. Andererseits gilt aber: $y \leq c \quad \forall y \in A$, insbesondere $c + \frac{1}{n} \leq c$, also $\frac{1}{n} \leq 0$, ein Widerspruch. Dies zeigt $c^2 \geq t$ und der Beweis für $c^2 \leq t$ verläuft analog. $\square$

Mit der Ordnungsrelation führen wir folgende Begriffe ein:

Definition 1.9. *Seien* $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

(i) $\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \textit{falls} \quad y \leq x \\ y & \textit{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x, y\} = \begin{cases} y & \textit{falls} \quad y \leq x \\ x & \textit{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ *:* $|x| = \max\{x, -x\}$

Für den Absolutbetrag gelten dann folgende Eigenschaften:

Satz 1.10. *(i)* $|x| \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|xy| = |x||y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y, \in \mathbb{R}$

(iv) $|x+y| \geq ||x| - |y|| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Wir überlassen den Beweis als Übung.

Satz 1.11 (Young'sche Ungleichung)**.**
$\forall \epsilon > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2.$$

Beweis. Es gilt:

$$\left(\sqrt{\epsilon}|x| - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}|y|\right)^2 \geq 0 \implies \epsilon|x|^2 - 2|x||y| + \frac{1}{\epsilon}|y|^2 \geq 0$$

Nun ist

$$|x|^2 = x^2, \quad |x||y| = |xy|, \quad |y|^2 = y^2$$

und der Satz ist bewiesen. □

Wir führen noch zwei weitere Symbole ein:

$$-\infty \text{ und } +\infty$$

mit der Konvention

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ein Intervall ist dann eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ von der Form:

1. für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$$
$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$$
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$

2. für $a \in \mathbb{R}$:

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$$
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$$
$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \geq x\}$$
$$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : \ a > x\}$$

3. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Definition 1.12. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.*

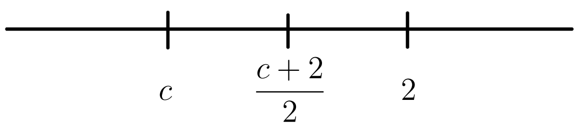
(i) $c \in \mathbb{R}$ *ist eine* **obere Schranke** *von A falls $\forall a \in A: \ a \leq c$. Die Menge A heisst* **nach oben beschränkt**, *falls es eine obere Schranke von A gibt.*

(ii) $c \in \mathbb{R}$ *ist eine* **untere Schranke** *von A falls $\forall a \in A: \ c \leq a$. Die Menge A heisst* **nach unten beschränkt**, *falls es eine untere Schranke von A gibt.*

(iii) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** *von A falls $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.*

(iv) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** *von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.*

Beispiel 1.13. Sei $A =]-\infty, 2[= \{x \in \mathbb{R} : \ x < 2\}$.
Behauptung: Die Menge M der oberen Schranken ist $M = [2, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2\}$.
Jedes $c \in [2, +\infty[$ erfüllt per Definition $c \geq 2$ und ist also eine obere Schranke von $]-\infty, 2[$.
Sei nun $c < 2$:



Dann ist $\frac{c+2}{2} \in [-\infty, 2]$ und aus $c < \frac{c+2}{2}$ folgt, dass c nicht obere Schranke von $]-\infty, 2[$ sein kann.

Notation. Falls A ein Maximum (resp. Minimum) besitzt, wird es mit $\max A$ (resp. $\min A$) bezeichnet.

Beispiel 1.14.

(i) $A =]-\infty, 2[$: A ist nach oben beschränkt, besitzt aber kein Maximum: da mit $c \in A$,

$$c < \frac{c+2}{2} \in A$$

folgt, dass keine obere Schranke von A in A enthalten ist.
Die Menge der oberen Schranken von A ist $M = [2, +\infty[$. Sie besitzt ein Minimum: $\min M = 2$.

(ii) $B =]-\infty, 2]$: B ist nach oben beschränkt und besitzt zudem ein Maximum: $\max B = 2$.
Die Menge der oberen Schranken von B ist $M = [2, +\infty[$. Sie besitzt ein Minimum: $\min M = 2$.

In beiden Fällen besitzt also die Menge der oberen Schranken ein Minimum. Dies ist ein allgemeines Phänomen:

Satz 1.15. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A:

$$c := \sup A$$

genannt das **Supremum** *von A.*

(ii) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A:

$$d := \inf A$$

genannt das **Infimum** *von A.*

Beweis.

(i) Sei B die Menge der oberen Schranken von A. Da A nach oben beschränkt ist, gilt $B \neq \emptyset$. Da $A \neq \emptyset$ und $\forall a \in A, \ \forall b \in B: \ a \leq b$ gilt, erfüllen A und B die Voraussetzungen des Ordnungsvollständigkeitsaxioms **V**. Es gibt also $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $c \in B$ und aus der zweiten Ungleichung folgt, dass c die kleinste obere Schranke von A ist. Mit anderen Worten, die Menge B der oberen Schranken von A besitzt ein Minimum. Dieses Minimum ist also das Supremum $\sup A \in B$ von A.

(ii) Analog.

□

Aus Satz 1.15 folgt:

- Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann stimmt die Menge der oberen Schranken von A mit dem Intervall $[\sup A, +\infty[$ überein.
- Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann stimmt die Menge der unteren Schranken von A mit dem Intervall $]-\infty, \inf A]$ überein.

Korollar 1.16. *Seien* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *Teilmengen von* $\mathbb{R}$.

1. *Falls B nach oben beschränkt ist, folgt* $\sup A \leq \sup B$.
2. *Falls B nach unten beschränkt ist, folgt* $\inf B \leq \inf A$.

Beispiel 1.17. (i) $A = [1, 2[\,: \ \sup A = 2, \ \inf A = 1$.

(ii) $A = \{1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots\}$ ist nicht nach oben beschränkt.
Idee:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \to \infty$$

(iii) $A = \{1-\frac{1}{3}, (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}), (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) + (\frac{1}{9}-\frac{1}{11}), \cdots\}$.

Dann gilt: $\sup A = \frac{\pi}{4}$ (Leibniz).

Konvention. Falls A nicht nach oben beschränkt (resp. nicht nach unten beschränkt) ist, definieren wir

$$\sup A = +\infty \quad (\text{respektive} \quad \inf A = -\infty).$$

Kardinalität

Definition 1.18. *(i) Zwei Mengen X, Y heissen* **gleichmächtig**, *falls es eine Bijektion $f: X \longrightarrow Y$ gibt.*

(ii) Eine Menge X ist **endlich**, *falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass X und $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind.*
Im ersten Fall ist die **Kardinalität** *von X, $\operatorname{card} X = 0$ und im zweiten Fall ist $\operatorname{card} X = n$.*

(iii) Eine Menge X ist **abzählbar**, *falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.*

Beispiel 1.19. (i) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ nicht endlich. Dann sind A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.
Beweisidee: Definiere rekursiv: $a_0 := \min A$, $a_n := \min A \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, $n \geq 1$.

Dann ist die Abbildung $\begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow A \\ n \longmapsto a_n \end{cases}$ eine Bijektion.

(iii) Sei $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann ist $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ abzählbar (und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind es auch).

Die Abbildung: $\begin{cases} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) \longmapsto 2^a \cdot 3^b \end{cases}$ ist injektiv; also ist $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ gleichmächtig wie eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und daher gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.

In Kapitel 2 beweisen wir dann:

Satz 1.20 (Cantor)**.** *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

1.2 Der Euklidische Raum

Sei $n \geq 1$ und

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \quad \forall j\}$$

das n-fache kartesische Produkt von $\mathbb{R}$. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

In der linearen Algebra wurde gezeigt, dass $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Operationen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.
Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

definiert. Folgende Eigenschaften gelten dann:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (symmetrisch).
2. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ (bilinear).
3. $\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$ (positiv definit).

Die **Norm** des Vektors x ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Satz 1.21 (Cauchy-Schwarz)**.**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ausserdem gelten für die Norm noch folgende Aussagen:

Satz 1.22. *1.* $\|x\| \geq 0$ *mit Gleichheit genau dann wenn* $x = 0$.

2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Beweis. Zu 3:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$2\langle x, y \rangle \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

woraus folgt:

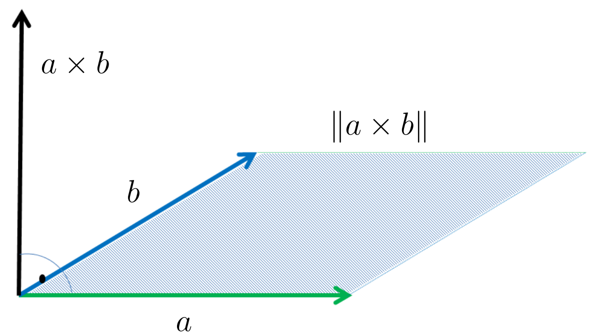
$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Das **Kreuzprodukt** zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b) \quad &\longmapsto a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

a, b und $a \times b$ bilden ein Rechtssystem. Es gilt: $\|a \times b\|$ = Flächeninhalt des von a, b aufgespannten Parallelogramms.



Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

1. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (Distributivität)
2. $a \times b = -b \times a$ (Antisymmetrie)
3. $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$ (Jacobi-Identität)

$\mathbb{R}^3$ versehen mit $+$ und $\times$ ist dann ein Beispiel einer interessanten Struktur, die nicht alle Körperaxiome erfüllt.

1.3 Komplexe Zahlen

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir folgende Multiplikation:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Dann gilt insbesondere:

$$\begin{aligned} &(0,0)(x, y) = (0,0), \qquad (1,0)(x, y) = (x, y) \\ \text{Falls } (x, y) \neq (0,0): \quad &(x, y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1,0) \end{aligned}$$

Satz 1.23. $\mathbb{R}^2$ *versehen mit der Addition der Vektoren* $+$ *und obig definierter Multiplikation* $\cdot$ *ist ein kommutativer Körper mit Einselement* $(1, 0)$ *und Nullelement* $(0, 0)$.

$\mathbb{R}^2, +, \cdot$ wird Körper der **komplexen Zahlen** genannt und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die Abbildung $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x, 0) \end{cases}$ respektiert die Körperoperationen.

Mittels dieser Abbildung identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.
Sei $i = (0, 1)$; dann besitzt jedes Element $z \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung

$$z = x + y \cdot i \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bemerke:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0)$$

Zusammen mit dem Distributivgesetz erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i \\ &= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \cdot i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \cdot i. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist also konsistent mit der Definition des Produktes.
Terminologie: Sei $z = x + yi$:

$x = \operatorname{Re} z$ ist der **Realteil** von z, $y = \operatorname{Im} z$ ist der **Imaginärteil** von z

Komplexe Konjugation: Für $z = x + yi$ definieren wir

$$\overline{z} := x - yi.$$

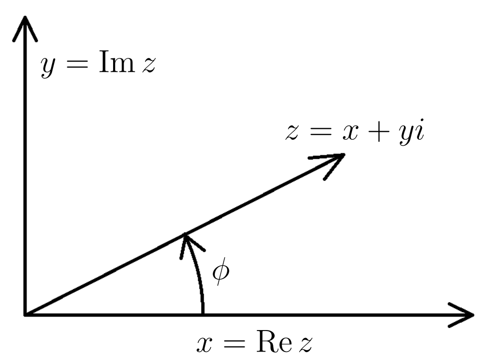
Satz 1.24. *(i)* $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(ii) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

Insbesondere folgt aus (ii), dass für $z \neq 0$ das multiplikative Inverse gegeben ist durch

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

Polarform:



Sei $r = \|z\|$, dann ist $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ wobei man ϕ mod $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ nehmen kann.
In der Darstellung

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

nennt sich $r = \|z\|$ der **Absolutbetrag** und ϕ das **Argument** der Zahl z.
Seien nun $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Dann folgt:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left([\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2] + [\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2]\cdot i\right)$$

Aus den Additionstheoremen für cos und sin folgt:

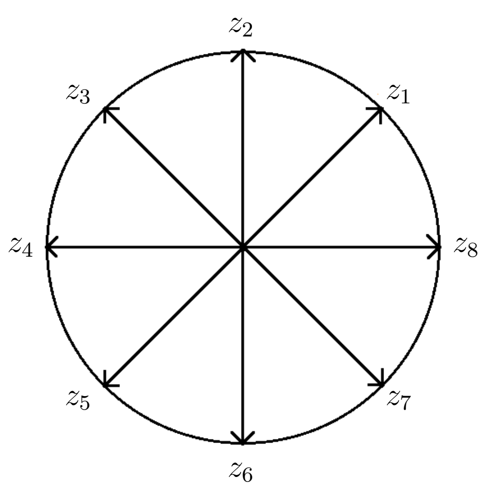
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + \sin(\phi_1+\phi_2)\cdot i\right)$$

Für $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ folgt durch Induktion:

$$z^n = r^n(\cos(n\cdot\phi) + i\sin(n\cdot\phi))$$

Korollar 1.25. *Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$: $z_1, z_2, \ldots, z_n$, wobei*

$$z_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi j}{n}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$



$z^8 = 1$

Allgemeiner gilt:

Satz 1.26 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ und*

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_j \in \mathbb{C}.$$

Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n$ in $\mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

2 Folgen und Reihen

Der erste grundlegende Begriff der Analysis ist der des Grenzwertes einer Folge. Auf diesem Begriff beruht dann die Theorie der konvergenten Reihen.

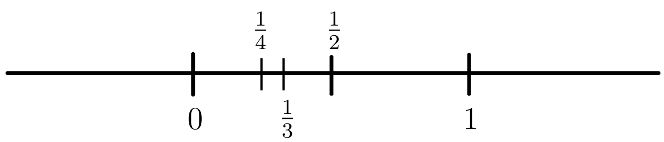
2.1 Grenzwert einer Folge

Definition 2.1. *Eine* **Folge** *(reller Zahlen) ist eine Abbildung*

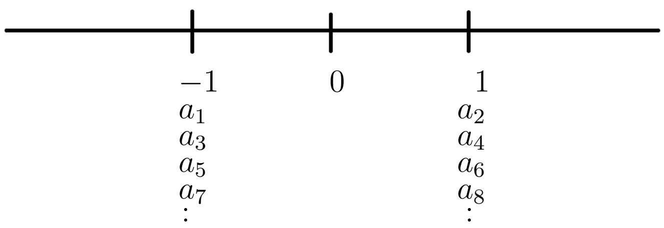
$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wir schreiben a_n *statt* $a(n)$ *und bezeichnen eine Folge mit* $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beispiel 2.2. 1. $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$



2. $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$

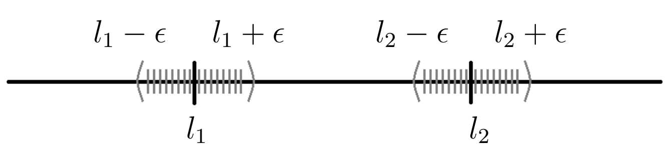


Für den Grenzwertbegriff ist folgendes Lemma von Bedeutung:

Lemma 2.3. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ ist die Menge } \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[\} \text{ endlich.}$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es $l_1 < l_2$ gibt, so dass beide l_1, l_2 die Eigenschaft erfüllen.



Sei $\epsilon = \dfrac{l_2 - l_1}{3}$, dann folgt:

$$]l_1 - \epsilon,\ l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon,\ l_2 + \epsilon[= \emptyset. \qquad (*)$$

Nach Voraussetzung sind

$$E_1 = \{n : \ a_n \notin]l_1 - \epsilon, \ l_1 + \epsilon[\} \subseteq \mathbb{N}^*$$

und

$$E_2 = \{n : \ a_n \notin]l_2 - \epsilon, \ l_2 + \epsilon[\} \subseteq \mathbb{N}^*$$

endlich. Insbesondere ist:

$$\mathbb{N}^* \setminus E_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \in]l_2 - \epsilon, \ l_2 + \epsilon[\}$$

unendlich. Andererseits folgt aus $(*)$: $\mathbb{N}^* \setminus E_2 \subseteq E_1$, ein Widerspruch. □

Definition 2.4. *Eine Folge* $(a_n)_{n \geq 1}$ *heisst* **konvergent**, *falls es* $l \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $\forall \epsilon > 0$ *die Menge*

$$\{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \notin]l - \epsilon, \ l + \epsilon[\}$$

endlich ist.

Nach Lemma 2.3 ist eine Solche Zahl l eindeutig bestimmt; sie wird mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

bezeichnet und nennt sich **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$.

Bemerkung 2.5. Jede konvergente Folge ist beschränkt: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent mit Grenzwert l. Dann ist $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt:
Sei $\epsilon = 1$ und $\{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \notin]l - 1, \ l + 1[\} = \{i_1, \ldots, i_M\}$. Dann folgt:

$$\{a_n : n \geq 1\} \subseteq]l - 1, l + 1[\cup \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_M}\}$$

und ist daher beschränkt.

In folgendem Lemma beweisen wir die Äquivalenz zwischen dem Kenvergenzbegriff gemäss Def. 2.4 und der historisch ersten Definition von Konvergenz, welche von D'Alembert (1765) und Cauchy (1821) formuliert wurde und in Konvergenzbeweisen oft benützt wird.

Lemma 2.6. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1$, so dass
$$|a_n - l| < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Beweis. $1 \implies 2$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist $\{n : \ a_n \notin]l - \epsilon, \ l + \epsilon[\}$ endlich und somit gibt es $N \geq 1$, so dass

$$\{n : a_n \notin]l - \epsilon, \ l + \epsilon[\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N - 1\}.$$

Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - l| < \epsilon.$$

$2 \implies 1$: Klar. □

Beispiel 2.7. Sei $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \geq 1$. Das heisst wir betrachten die Folge $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$.
Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
Begründung: $a_n - 1 = \dfrac{n}{n+1} - 1 = \dfrac{-1}{n+1}$. Es folgt $|a_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$.
Sei $\epsilon > 0$; nach Archimedes gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{N+1} < \epsilon$.
Dann folgt $\forall n \geq N$:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

Als nächstes untersuchen wir, wie die arithmetischen Operationen mit Konvergenz verträglich sind.

Satz 2.8.
Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. *Dann ist $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.*
2. *Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*
3. *Nehmen wir zudem an, dass $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $b \neq 0$. Dann ist $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.*
4. *Falls es ein $K \geq 1$ gibt mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K$ dann folgt $a \leq b$.*

Beweis. Zu 2:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|. \end{aligned}$$

Da $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, gibt es $M \geq 1$ mit $|b_n| \leq M \quad \forall n \geq 1$ (siehe Bem. 2.5).
Also:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a|M + |b_n - b||a|.$$

Sei $\epsilon > 0$:

- Es gibt $N_1 \geq 1$ mit $|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{M + |a|} \quad \forall n \geq N_1$.
- Es gibt $N_2 \geq 1$ mit $|b_n - b| < \dfrac{\epsilon}{M + |a|} \quad \forall n \geq N_2$.

Für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$ folgt:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \frac{\epsilon \cdot M}{M + |a|} + \frac{\epsilon \cdot |a|}{M + |a|} = \epsilon.$$

Zu 4: Sei $\epsilon > 0$ und $N \geq K$ mit

$$|a_n - a| < \epsilon, \qquad |b_n - b| < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Dann folgt insbesondere für alle $n \geq N \geq K$:

$$a < a_n + \epsilon \leq b_n + \epsilon < (b + \epsilon) + \epsilon = b + 2\epsilon.$$

Aus $a < b + 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$ folgt dann: $a \leq b$. $\square$

Beispiel 2.9. $b \in \mathbb{Z}: \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$.

Das folgt aus $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ und wiederholter Anwendung von Satz 2.8(2) und (3).

2.2 Der Satz von Weierstrass und Anwendungen

Definition 2.10. *1.* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist* **monoton wachsend** *falls:*

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \geq 1.$$

2. $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist* **monoton fallend** *falls:*

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \geq 1.$$

Satz 2.11 (Weierstrass)**.**

- *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert* $(a_n)_{n\geq 1}$ *mit Grenzwert*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$
- *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert* $(a_n)_{n\geq 1}$ *mit Grenzwert*
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}.$$

Beweis. Sei $s := \sup\{a_n : n \geq 1\}$; sei $\epsilon > 0$.
Da s die kleinste obere Schranke von $\{a_n : n \geq 1\}$ ist, gibt es $N \geq 1$ mit

$$s - \epsilon < a_N$$

woraus

$$s - \epsilon < a_N \leq a_n \leq s \qquad \forall n \geq N$$

folgt; insbesondere $|a_n - s| < \epsilon$. $\square$

Beispiel 2.12. Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$.

Wir können annehmen, dass $q > 0$. Sei $x_n = n^a q^n$; dann folgt

$$x_{n+1} = (n+1)^a\, q^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a q \cdot n^a q^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Also:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot q \cdot x_n$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1$ (Beispiel 2.9) gibt es ein n_0, so dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q} \quad \forall n \geq n_0$.

Es folgt:

$$x_{n+1} < x_n \qquad \forall n \geq n_0$$

Da $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ ist die Folge nach unten beschränkt und für $n \geq n_0$ monoton fallend. Sei

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \cdot q x_n = q \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = q \cdot l.$$

Also $(1-q)\cdot l = 0$ woraus $l = 0$ folgt.

Bemerkung 2.13. In obigem Argument haben wir zweimal die folgende einfache Tatsache benützt: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die durch

$$b_n := a_{n+k} \qquad n \geq 1$$

definierte Folge konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Beispiel 2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(i) Aus $n \geq 1$ folgt $n^{1/n} \geq 1$.
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt die Identität:

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}\right)$$

wie man durch direktes Ausmultiplizieren sieht. Mit $a = 1$ und $b = n^{1/n}$ folgt

$$\underbrace{(n-1)}_{\geq 0} = \left(n^{1/n} - 1\right) \underbrace{\left(n^{\frac{1}{n}(n-1)} + n^{\frac{1}{n}(n-2)} + \cdots + 1\right)}_{\geq 1}$$

woraus $n^{1/n} - 1 \geq 0$ folgt.

(ii) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist $0 < \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. Wende Beispiel 2.12 mit $a = 1$ und $q = \frac{1}{1+\epsilon}$ an und erhalte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\epsilon)^n} = 0$$

Insbesondere gibt es $N \geq 1$, so dass

$$\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \qquad \forall n \geq N.$$

Also $n < (1+\epsilon)^n$. Nochmalige Anwendung der Identität (i) mit $b = 1+\epsilon$ und $a = n^{1/n}$ impliziert

$$n^{1/n} \leq 1+\epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Zusammen mit (i):

$$1 \leq n^{1/n} < 1+\epsilon \qquad \forall n \geq N$$

woraus $\left|n^{1/n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$ folgt.

Beispiel 2.15. Die Folge $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ konvergiert. Der Limes ist

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

die Eulersche Konstante

$$e \sim 2.718281828459045235\ldots$$

welche die Basis für die natürlichen Logarithmen ist.

Lemma 2.16 (Bernoulli Ungleichung)**.**

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x > -1$$

Beweis. (Induktion)
Für $n = 0$ ist die Aussage $1 \geq 1$. Sei $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)\underbrace{(1+x)^n}_{\geq(1+nx)} \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Wir behandeln jetzt das Beispiel 2.15. Wir zeigen, dass die Folge

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

monoton fallend ist. Sei $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{(n+1)} = \left[\frac{n^2}{n^2-1}\right]^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left[1 + \frac{1}{n^2-1}\right]^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} \qquad \text{(Bernoulli)} \\ &> \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1. \qquad \left(\text{beachte } \frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Dann folgt, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ konvergiert und somit auch

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

Beispiel 2.17. Sei $c > 1$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch:

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \qquad n \geq 1.$$

Dann existiert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ und es gilt $a^2 = c$.

Beweis.

(i) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.
Sei

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_n} - a_n\right) = a_n + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)$$

Wir zeigen zunächst: : $a_n^2 \geq c \quad \forall n \geq 1$.
Für $n = 1$: $a_1^2 = c^2 > c$ da $c > 1$. Und für $n \geq 1$:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 = c + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right)^2 \geq c.$$

Aus $a_n^2 \geq c$ folgt:

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{c-a_n^2}{2a_n}\right) \leq a_n.$$

(ii) Es ist klar: $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.
Aus $a_n^2 \geq c > 1$ folgt dann $a_n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$.

(iii) Nach Weierstrass: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann folgt aus (ii): $a \geq 1$, insbesondere $a \neq 0$ und:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{c}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

Woraus $a^2 = c$ folgt.

$\square$

2.3 Limes superior und Limes inferior

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Weierstrass ist, wie man mit jeder beschränkten Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren kann, welche dann einen Grenzwert besitzen.
Sei für jedes $n \geq 1$:

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \quad \text{und} \quad c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Dann folgt aus Korollar 1.16:

$$b_n \leq b_{n+1} \qquad \forall n \geq 1$$
$$c_{n+1} \leq c_n \qquad \forall n \geq 1$$

und beide Folgen sind beschränkt. Nach Weierstrass (Satz 2.11) sind beide Folgen konvergent und wir definieren:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{(Limes inferior)}$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \text{(Limes superior)}$$

Aus $b_n \leq c_n$ folgt mit Satz 2.8(4):

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beispiel 2.18. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.
Dann: $b_n = -1$ und $c_n = 1 + \frac{1}{n_g}$ wobei n_g die kleinste gerade Zahl $\geq n$ bezeichnet. Also:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = +1.$$

2.4 Das Cauchy Kriterium

Natürliche Frage: Wie sieht man einer Folge an, ob sie konvergent ist, ohne ihren Grenzwert zu kennen? Das Cauchy Kriterium ist eine Antwort auf diese Frage.
Zunächst beweisen wir:

Lemma 2.19. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis.
$(\Longrightarrow)$ Übung.
$(\Longleftarrow)$ Sei

$$b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}, \qquad c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

und

$$A := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Aus $b_n \leq A \leq c_n$ folgt: $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N(\epsilon) \geq 1$ mit:

$$A - \epsilon < b_n \leq A \leq c_n < A + \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Also:

$$A - \epsilon < a_k < A + \epsilon \qquad \forall k \geq N(\epsilon)$$

woraus

$$|a_k - A| < \epsilon \qquad \forall k \geq N(\epsilon)$$

folgt. □

Satz 2.20 (Cauchy Kriterium)**.** *Die Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist genau dann konvergent, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1 \quad \textit{so dass} \quad |a_n - a_m| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert A. Sei $\epsilon > 0$ und $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n \geq N.$$

Dann folgt $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon.$$

($\Longleftarrow$) Sei $\epsilon > 0$ und $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \forall n \geq N, \; \forall m \geq N.$$

Sei $n \geq N$ fest beliebig. Dann folgt $\forall m \geq N$:

$$a_m - \epsilon \leq a_n \leq a_m + \epsilon$$

Sei $k \geq N$; dann folgt:

$$\sup\{a_m : \, m \geq k\} - \epsilon \leq a_n \leq \inf\{a_m : \, m \geq k\} + \epsilon$$

das heisst

$$c_k - \epsilon \leq a_n \leq b_k + \epsilon \qquad \forall k \geq N$$

woraus

$$\limsup_{n\to\infty} a_n - \epsilon < \liminf_{n\to\infty} a_n + \epsilon$$

folgt. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

folgt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Der Satz folgt dann aus Lemma 2.19. □

2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

In diesem Abschnitt behandeln wir weitere wichtige Folgerungen des Ordnungsvollständigkeitsaxioms. Insbesondere zeigen wir, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Als Vorbereitung zeigen wir ein Lemma von Cauchy-Cantor, dass monoton absteigende Folgen von abgeschlossenen Intervallen betrifft.

Definition 2.21. *Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ der Form*

1. $[a, b]$, $\quad a \leq b,\ a, b, \in \mathbb{R}$
2. $[a, +\infty[$, $\quad a \in \mathbb{R}$
3. $]-\infty, a]$, $\quad a \in \mathbb{R}$
4. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

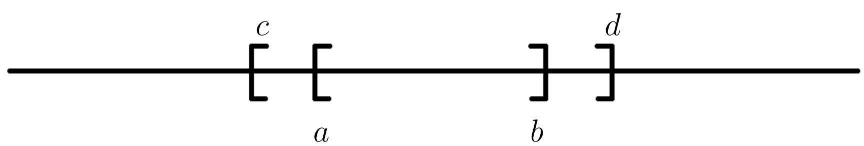
Wir definieren die Länge $\mathcal{L}(I)$ des Intervalls als

$$\mathcal{L}(I) = b - a \qquad \text{im ersten Fall}$$
$$\mathcal{L}(I) = +\infty \qquad \text{in (2), (3), (4).}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{L}(I) \geq 0$. Das abgeschlossene Intervall ist genau dann eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, falls $\mathcal{L}(I) < +\infty$.

Bemerkung 2.22. Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ auch in I ist.

Bemerkung 2.23. Seien $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt $I \subseteq J$ genau dann, wenn $c \leq a$ und $b \leq d$.



Es folgt dann: $\mathcal{L}(I) = b - a \leq d - c = \mathcal{L}(J)$.

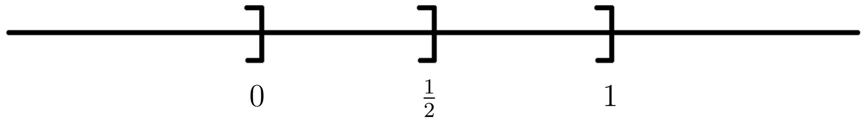
Das Lemma von Cauchy-Cantor handelt von monoton fallenden Folgen von abgeschlossenen Intervallen.
Eine monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(X_n)_{n \geq 1}$, $X_n \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \cdots$$

Betrachten wir zwei Beispiele:

Beispiel 2.24. 1. Sei $X_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$, $n \geq 1$.

Dann gilt offensichtlich: $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$



und $\bigcap_{n\geq 1} X_n = \emptyset$. (folgt aus Archimedes)

2. Sei $X_n = [n, +\infty[$, $n \geq 1$. Dann gilt: $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$ und $\bigcap_{n\geq 1} X_n = \emptyset$. (Archimedes)

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor)**.** *Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$.*
Dann gilt:

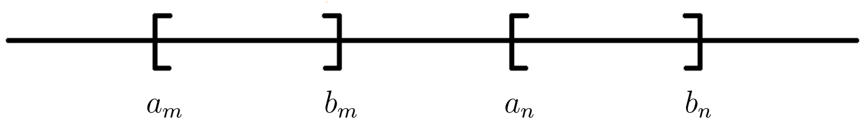
$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Falls zudem $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthält $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ genau einen Punkt.

Beweis. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ und : $I_m = [a_m, b_m]$ wobei $n \geq 1$, $m \geq 1$.
Behauptung:

$$a_n \leq b_m \qquad \forall n \geq 1, \ \ \forall m \geq 1.$$

Sonst gibt es $n \geq 1$ und $m \geq 1$ mit $b_m < a_n$.



Dann würde folgendes gelten:

$$[a_m, b_m] \cap [a_n, b_n] = \emptyset,$$

das heisst $I_m \cap I_n = \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch, denn es gilt entweder $I_m \subseteq I_n$ oder $I_n \subseteq I_m$. Seien

$$A = \{a_n : \ n \geq 1\} \neq \emptyset, \qquad B = \{b_m : \ m \geq 1\} \neq \emptyset.$$

Dann erfüllen A und B die Voraussetzungen des Axioms **V** und deswegen gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$a_n \leq c \leq b_n \qquad \forall n \geq 1$$

woraus

$$c \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$$

folgt.
Zur zweiten Aussage: aus

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1} \subseteq I_n = [a_n, b_n]$$

folgt

$$\mathcal{L}(I_{n+1}) = b_{n+1} - a_{n+1} \le b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n)$$

und (Weierstrass) folglich existiert

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) \ge 0.$$

Falls es jetzt $c_1 < c_2$ gibt mit

$$\{c_1, c_2\} \subseteq \bigcap_{n\ge 1} I_n$$

dann folgt

$$[c_1, c_2] \subseteq I_n \qquad \forall n \ge 1$$

und somit

$$0 < c_2 - c_1 \le b_n - a_n = \mathcal{L}(I_n).$$

Dies beweist die zweite Aussage. □

Als Anwendung zeigen wir:

Satz 2.26. $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. $[0,1]$ ist nicht abzählbar.
Widerspruchsbeweis: Sei

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$$

eine Bijektion. Wir bilden induktiv eine monoton fallende Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots I_n \supseteq \cdots$ abgeschlossener Intervalle in $[0,1]$ mit

$$a(n) \notin I_n \qquad \forall n \ge 0.$$

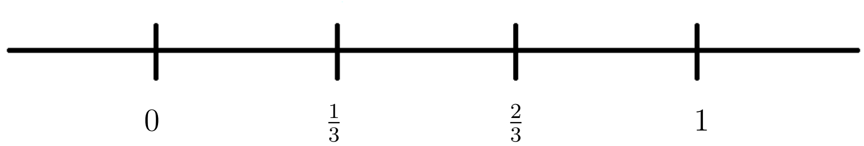
Dann folgt:

$$a(n) \notin \bigcap_{l\ge 0} I_l \qquad \forall n \ge 0.$$

Andererseits gilt nach Cauchy-Cantor:

$$\bigcap_{l\ge 0} I_l \ne \emptyset$$

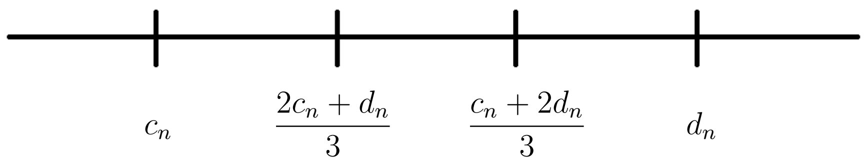
woraus folgt, dass $a : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ nicht surjektiv sein kann.
Konstruktion von I_n:
Sei $a(0) \in [0,1]$.



Dann nehmen wir als I_0 eines der Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

welches $a(0)$ nicht enthält.
Sei nun I_n mit $a(n) \notin I_n$ induktiv definiert, $I_n = [c_n, d_n]$.



Sei dann I_{n+1} eines dieser drei Intervalle, das $a(n+1)$ nicht enthält. Dann folgt:

$$I_{n+1} \subsetneq I_n \quad \text{und} \quad a(n+1) \notin I_{n+1}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Für den Satz von Bolzano-Weierstrass benötigen wir den Begriff der Teilfolge einer Folge.

Definition 2.27. *Eine* **Teilfolge** *einer Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist eine Folge* $(b_n)_{n\geq 1}$ *wobei*

$$b_n = a_{l(n)}$$

und $l : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft*

$$l(n) < l(n+1) \qquad \forall n \geq 1.$$

Beispiel 2.28. $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$. Sei

$$l(n) = 2n,$$

dann ist $b_n = 1 + \dfrac{1}{2n}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$.

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $I = [a, b]$ beschränkt mit $\{a_n : n \geq 1\} \subseteq I$.
Wir definieren induktiv

$$I_1 = I \supseteq I_2 \supseteq \cdots I_n \supseteq \cdots$$

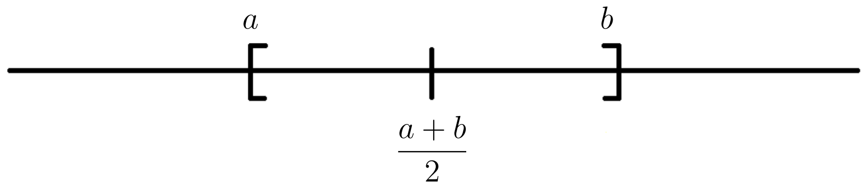
eine monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle mit:

1. $\mathcal{L}(I_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(I_n)$

2. $E_n = \{f \in \mathbb{N}^* : a_f \in I_n\}$ ist unendlich.

Schritt 1: $I_1 = I,\ E_1 = \mathbb{N}^*$

Schritt 2: $I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$



Sei dann I_2 eines dieser zwei Intervalle, für welches

$$E_2 := \{f \in \mathbb{N}^* :\ a_f \in I_2\}$$

unendlich ist.
Dann ist $I_2 \subseteq I_1$ und $\mathcal{L}(I_2) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_1)$.
Dasselbe Argument liefert den Induktionsschritt von n nach $n+1$.
Konstruktion der Teilfolge:

$$l(1) = 1, \quad a_1 \in I = I_1.$$

Da

$$E_2 := \{f \in \mathbb{N}^* :\ a_f \in I_2\}$$

unendlich ist, gibt es

$$l(2) \in E_2 \quad \text{mit} \quad l(2) > l(1).$$

Es gilt also $a_{l(2)} \in I_2$.
Dasselbe Argument liefert den Schritt von n auf $n+1$.
Wir erhalten eine Abbildung $l : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ mit:

$$l(n+1) > l(n) \qquad \forall n \geq 1, \quad a_{l(n)} \in I_n.$$

Nach Cauchy-Cantor (Satz 2.25) sei

$$\{c\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

Da $a_{l(n)}$ und c in I_n enthalten sind, folgt

$$\left|a_{l(n)} - c\right| \leq \mathcal{L}(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a).$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} a_{l(n)} = c.$$

$\square$

Es gibt einen interessanten Zusammenhang zwischen Bolzano-Weierstrass und $\limsup$ und $\liminf$, nämlich:

Bemerkung 2.30. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Zudem gibt es zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$ die $\liminf_{n\to\infty} a_n$ respektive $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als Grenzwert annehmen.

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Der Begriff einer Folge in $\mathbb{R}^d$ (und $\mathbb{C}$) ist wie im Falle von $\mathbb{R}$ definiert:

Definition 2.31. *Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung*

$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$.

Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Definition 2.32. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst* **konvergent**, *falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \quad \textit{mit} \quad \|a_n - a\| < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Falls solch ein a existiert, ist es eindeutig bestimmt und nennt sich **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Sei $a_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,d})$ die Koordinaten von a_n.

Satz 2.33. *Sei $b = (b_1, \ldots, b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = b$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq d.$

Bemerkung 2.34. Sei $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Dann ist $\forall\, 1 \leq j \leq d$:

$$x_j^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{\|x\|^2} \leq d \cdot \max_{1\leq i\leq d} x_i^2$$

Woraus

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$$

folgt.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $\epsilon > 0$ und $N \geq 1$ mit

$$\|a_n - b\| < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

Dann folgt aus Bemerkung 2.34 für jedes $1 \leq j \leq d$:

$$|a_{n,j} - b_j| < \epsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j.$$

(2) $\implies$ (1): Sei $\epsilon > 0$ und für jedes $1 \leq j \leq d$ sei $N(j)$, so dass

$$|a_{n,j} - b_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}} \qquad \forall n \geq N(j).$$

Dann ist für $N := \max\{N(1), \dots, N(d)\}$:

$$\max_{1\leq j\leq d} |a_{n,j} - b_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}} \qquad \forall n \geq N$$

und somit folgt aus Bemerkung 2.34

$$\|a_n - b\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1\leq j\leq d} |a_{n,j} - b_j| < \epsilon.$$

□

Bemerkung 2.35. Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt. Das heisst:

$$\exists R \geq 0 \quad \text{mit} \quad \|a_n\| \leq R \qquad \forall n \geq 1.$$

Mittels Satz 2.33 können wir das Cauchy Kriterium respektive den Satz von Bolzano-Weierstrass anwenden und erhalten:

Satz 2.36. *1. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist:*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1 \quad \textit{mit} \quad \|a_n - a_m\| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq N.$$

2. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

2.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Begriff der Konvergenz der Reihe

$$\text{„}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\text{"}$$

stützt sich auf die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definition 2.37. *Die Reihe*

$$„\sum_{k=1}^{\infty} a_k“$$

ist **konvergent**, *falls die Folge* $(S_n)_{n\geq 1}$ *der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Notation. Von nun an bezeichnen wir den Absolutbetrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Beispiel 2.38 (Geometrische Reihe)**.** Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ und dessen Wert ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Sei $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n$.

$$q \cdot S_n = q + \cdots q^n + q^{n+1}$$

woraus

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

folgt. Es gilt also:

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Nun zeigen wir die Konvergenz:

$$\left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Aus Beispiel 2.12 und $0 \leq |q| < 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} = 0.$$

Somit konvergiert $(S_n)_{n\geq 1}$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beispiel 2.39 (Harmonische Reihe)**.** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert. (Siehe Beispiel 1.17(ii))

Analog zu Satz 2.8 für Folgen erhalten wir:

Satz 2.40. *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *konvergent, sowie* $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *konvergent und* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$.

2. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ *konvergent und* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. (1): Seien

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad U_n := \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad W_n := \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k).$$

Dann ist

$$W_n = S_n + U_n$$

woraus nach Satz 2.8

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} U_n$$

folgt, was die erste Aussage beweist.
Der Beweis für die zweite Aussage verläuft analog. □

Produkte von konvergierenden Reihen sind etwas schwieriger zu handhaben; wir werden Produkte im Fall von absolut konvergenten Reihen behandeln.
Das Cauchy Kriterium für Konvergenz von Folgen liefert ein sehr nützliches Kriterium für die Konvergenz von Reihen.

Satz 2.41 (Cauchy Kriterium)**.** *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, falls:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \quad \textit{mit} \quad \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \qquad \forall m \geq n \geq N.$$

Beweis. Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann folgt für $m \geq n$:

$$S_m - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{m} a_k.$$

Der Satz folgt dann aus dem Cauchy Kriterium für Folgen. (Satz 2.20) □

Reihen mit nichtnegativen Gliedern sind speziell einfach zu behandeln; auch spielen sie in der Theorie absolut konvergenter Reihen eine wichtige Rolle, deshalb behandeln wir sie zuerst. Folgender Satz ist eine einfache Anwendung des Satzes von Weierstrass:

Satz 2.42. *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, falls die Folge* $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis.

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} \geq 0.$$

Also ist $(S_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend.
Falls $(S_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist, folgt aus Weierstrass (Satz 2.11), dass die Folge konvergiert. Falls sie nicht nach oben beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

□

Wir erhalten folgendes sehr nützliche Korollar:

Korollar 2.43 (Vergleichssatz)**.** *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Reihen mit:*

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \forall k \geq 1.$$

Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{divergent}$$

Die Implikationen treffen auch zu, wenn es $K \geq 1$ *gibt, so dass*

$$0 \leq a_k \leq b_k \qquad \forall k \geq K.$$

Beispiel 2.44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{(k-1)k}$, $k \geq 1$. Dann gilt $0 \leq a_k \leq b_k$, $k \geq 2$ und

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} b_k &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} < 1 \qquad \forall n \geq 1.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Vergleichssatz.

Definition 2.45. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heisst* **absolut konvergent**, *falls*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Eine Anwendung des Cauchy Kriterium liefert:

Satz 2.46. *Eine absolut konvergente Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist auch konvergent und es gilt:*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Beweis. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gilt nach Cauchy (Satz 2.41): $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1$ mit:

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon \qquad \forall m \geq n \geq N.$$

Daraus folgt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$$

woraus mit Satz 2.41 die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt.

Seien jetzt $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $U_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Dann gilt

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| = U_n$$

und folglich

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} U_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

wobei die Ungleichung aus Satz 2.8(4) folgt. □

Beispiel 2.47.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent.

Dass die Reihe im Beispiel 2.47 konvergiert, ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes:

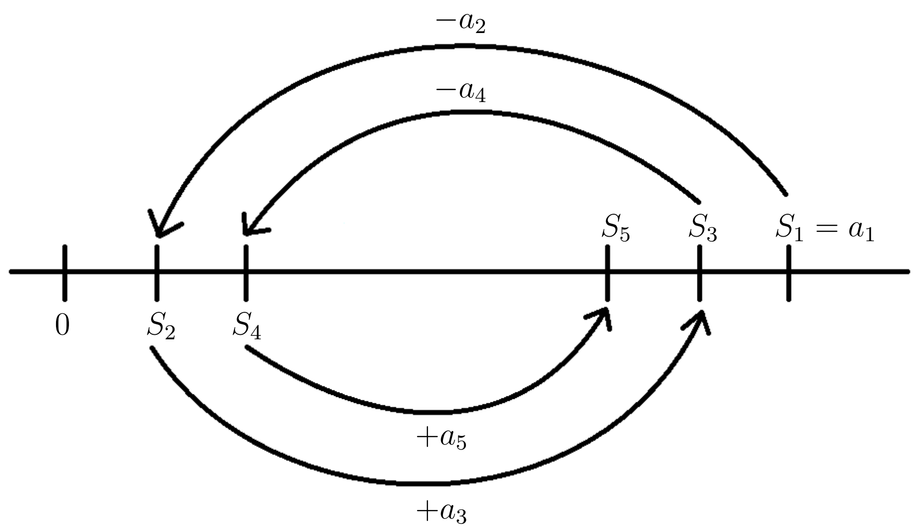
Satz 2.48 (Leibniz 1682)**.**
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ *monoton fallend mit* $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*. Dann konvergiert*

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Beweis. Sei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, a_k$. Die Idee des Beweises lässt sich bildlich wie folgt darstellen:



Sei also

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} &= \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1}}_{S_{2n-1}} - a_{2n} + a_{2n+1} \\
&= S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}. \\
S_{2n} &= \underbrace{a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-2}}_{S_{2n-2}} + a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}.
\end{aligned}$$

Die Folge $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ ist also monoton fallend und $(S_{2n})_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend.
Aus

$$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \tag{$*$}$$

folgt

$$S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1.$$

Beide monotonen Folgen sind beschränkt, also existieren $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$.
Aus $(*)$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}.$$

Daraus folgt, dass $(S_m)_{m\geq 1}$ mit gleichem Grenzwert konvergiert. $\square$

Beispiel 2.49. Betrachten wir nochmals das Beispiel 2.47:

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\ \frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \leq S \leq 1. \end{aligned}$$

Wir ändern jetzt die Reihenfolge der Summanden wie folgt:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \cdots$$

und erhalten

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

Die umgeordnete Reihe konvergiert also mit Grenzwert $\frac{1}{2}S$!

Riemann (1854) hat sogar gezeigt, dass es für jede reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ eine Umordnung obiger Reihe gibt, die gegen A konvergiert! (Übung).

Definition 2.50. *Eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ *ist eine* **Umordnung** *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *falls es eine bijektive Abbildung*

$$\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

gibt, so dass

$$a'_n = a_{\phi(n)}.$$

Bemerkung 2.51. Aus Riemann folgt, dass es überabzählbar viele Bijektionen von $\mathbb{N}^*$ gibt.

Satz 2.52 (Dirichlet 1837)**.** *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Wir wenden das Cauchy Kriterium auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ an:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N$ und $k \geq 1$:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \epsilon.$$

Sei $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ eine Bijektion und

$$S'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{\phi(i)}$$

die m-te Partialsumme der umgeordneten Reihe.
Da ϕ surjektiv ist, können wir $M \geq N$ wählen, so dass:

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(M)\}.$$

Dann folgt $\forall m \geq M$:

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(m)\}$$

und

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}.$$

Für $k \geq 1$, so dass $m \leq N + k$ und $\max\{\phi(1), \dots, \phi(m)\} \leq N + k$ folgt:

$$|S'_m - S_m| \leq |a_{N+1}| + \cdots + |a_{N+k}| < \epsilon.$$

Folglich gilt $\lim_{n\to\infty} (S'_m - S_m) = 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} S'_m = \lim_{n\to\infty} S_m + \lim_{n\to\infty} (S'_m - S_m) = \lim_{n\to\infty} S_m$$

□

Übung. Wo haben wir absolute Konvergenz benützt?

Wir werden jetzt hinreichende Bedingungen für absolute Konvergenz herleiten. Es handelt sich dabei um das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium. Beide benützen den Vergleichssatz (Korollar 2.43) und die Konvergenzbedingung für die geometrische Reihe (Beispiel 2.38).

Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821)**.**
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ *mit* $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$. *Falls*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*
Falls

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

divergiert die Reihe.

Beweis. Sei
$$c_n = \sup\left\{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \geq n\right\}.$$
Die Annahme ist, dass
$$\left\{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} : k \geq 1\right\}$$
beschränkt ist. Dann ist $(c_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} c_n.$$
Sei $0 < q < 1$ mit:
$$\lim_{n\to\infty} c_n < q < 1.$$
Sei $N \geq 1$, so dass
$$c_N \leq q < 1.$$
Dann folgt $\forall k \geq N$, dass
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$$
woraus $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ folgt, und somit für $j \geq 1$:
$$|a_{N+j}| \leq q|a_{N+j-1}| \leq \cdots \leq q^j |a_N| = q^{N+j}\frac{|a_N|}{q^N}.$$
Wir haben also gezeigt, dass $\forall n \geq N+1$:
$$|a_n| \leq q^n \frac{|a_N|}{q^N}.$$
Die erste Aussage des Satzes folgt dann vom Vergleichssatz (2.43), angewendet auf die geometrische Reihe (2.38).
Ein analoges Argument zeigt, dass wenn
$$\liminf_{m\to\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} > 1$$
die Folge $(|a_m|)_{m\geq 1}$ unbeschränkt ist. Also können weder $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ noch $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ konvergieren.

□

Beispiel 2.54 (Die Exponentialfunktion)**.** Für $z \in \mathbb{C}$ betrachte die Reihe
$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$
mit allgemeinem Glied
$$a_n = \frac{z^n}{n!}.$$

Dann folgt für $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$ und die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir definieren die Exponentialfunktion:

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Bemerkung 2.55. Das Quotientenkriterium versagt, wenn zum Beispiel unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden.

Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)**.**

1. *Falls*
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$
dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

2. *Falls*
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$
dann divergieren $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Beweis.

1. Sei $c_n := \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} : \ k \geq n \right\}$ und $0 < q < 1$ mit
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1.$$
Dann gibt es $N \geq 1$ mit
$$c_N = \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} : \ k \geq N \right\} \leq q,$$
woraus
$$|a_k| \leq q^k \qquad \forall k \geq N$$
folgt. Die Aussage folgt dann aus dem Vergleichssatz (2.43), angewendet auf die geometrische Reihe (2.38).

2. Ein analoges Argument zeigt, dass $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n, falls
$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

$\square$

Eine wichtige Klasse von Funktionen in der Analysis wird durch "konvergente Potenzreihen" definiert.
Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert, definieren wir

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls} \quad \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls} \quad \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Korollar 2.57. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$ *und divergiert für alle* $|z| > \rho$ *.*

Beweis. Sei $a_n := c_n z^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|}|z|$. Also:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|z|$$

und die Aussage folgt aus dem Wurzelkriterium (Satz 2.56). □

Die Zeta Funktion

Sei $s > 1$ und

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Wir wissen zum Beispiel, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{$*$}$$

konvergiert.

- Quotientenkriterium: $\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \longrightarrow 1\,.$
- Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{n^2}^{\,-1} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{-2} \longrightarrow 1$ (siehe Beispiel 2.14).

Weder Quotientenkriterium noch Wurzelkriterium erlauben auf die Konvergenz von $(*)$ zu schliessen.
Behauptung: für $s > 1$ konvergiert die obige Reihe.

Sei $S_N = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{N^s}$. Sei $k \geq 1$ mit $N \leq 2^k$, dann ist $S_N \leq S_{2^k}$.

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{\leq \frac{2}{2^s}} + \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{\leq \frac{4}{4^s}} + \underbrace{\frac{1}{9^s} + \cdots + \frac{1}{16^s}}_{\leq \frac{8}{8^s}} + \cdots \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \cdots
\end{aligned}$$

Da $s-1>0$ folgt $2^{s-1}>1$ und

$$\frac{1}{2^{s-1}} < 1.$$

Die Konvergenz folgt dann vom Vergleichssatz (2.43), angewendet auf die geometrische Reihe (2.38).

Doppelte Summation

Betrachten wir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & \cdots & = & S_0 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & = & S_1 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{20} & + & a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & = & S_2 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
= & & = & & = & & & & = \\
b_0 & + & b_1 & + & b_2 & + & \cdots & = & ???
\end{array}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & - & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & + \\
0 & + & 1 & - & 1 & + & 0 & + & \cdots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & + \\
0 & + & 0 & + & 1 & - & 1 & + & \cdots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
= & & = & & = & & = & & & & =0 \\
1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & =1 & \boxed{1 \neq 0}
\end{array}$$

Gegeben eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$. Dann können

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots$$

und

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right) = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

beide konvergent sein mit verschiedenen Grenzwerten.
Wir nennen $\sum\limits_{i,j\geq 0} a_{ij}$ eine Doppelreihe.

Definition 2.58. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *ist eine* **lineare Anordnung** *der Doppelreihe* $\sum\limits_{i,j\geq 0} a_{ij}$ *, falls es eine Bijektion*

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$ *.*

Satz 2.59 (Cauchy 1821)**.** *Wir nehmen an, dass es* $B \geq 0$ *gibt, so dass*

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \qquad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \qquad \forall i \geq 0 \quad \textit{und} \quad U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \qquad \forall j \geq 0$$

sowie

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \quad \textit{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.

Beweis. Sei $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ eine lineare Anordnung der obigen Doppelreihe. Für jedes $n \geq 0$ gibt es $m \geq 0$, so dass:

$$\{b_0, \ldots, b_n\} \subseteq \left\{ a_{ij} : \begin{array}{l} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m \end{array} \right\}$$

woraus

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i| \leq \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B$$

folgt. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergiert.

Dasselbe Argument liefert auch, dass die Reihen

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \text{und} \quad U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

absolut konvergieren.

Wir wenden jetzt das Cauchy Kriterium an auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$:

$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1:$

$$|b_{n+1}| + \cdots + |b_{n+k}| < \epsilon.$$

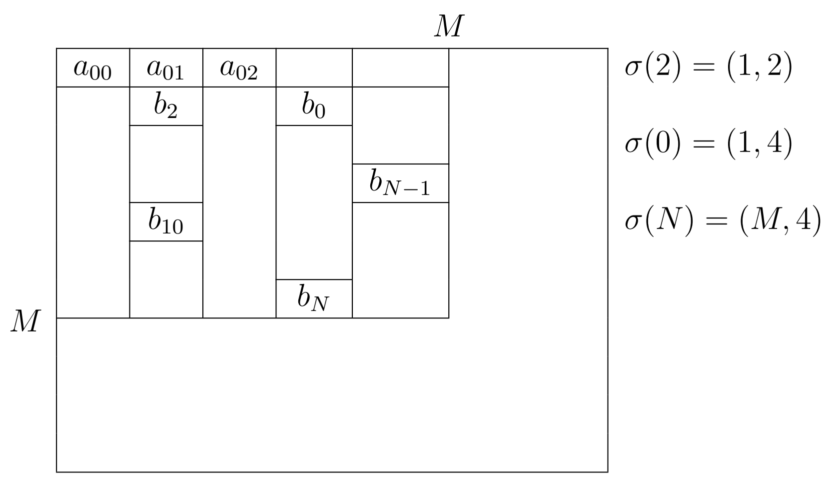
Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ und entsprechendes $N \geq 0$ wählen wir ein $M \geq 0$, so dass alle

$$b_0, b_1, \ldots, b_N$$

im "Quadranten"

$$a_{ij}, \quad 0 \leq i \leq M, \; 0 \leq j \leq M$$

vorkommen:



Mit dieser Wahl sind die Terme

$$b_0, \ldots, b_N$$

präsent in der Summe

$$\sum_{i=0}^{l} b_i \quad \text{für} \quad l \geq N,$$

sowie in

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \quad \text{für} \quad m \geq M, \; n \geq M.$$

Es folgt:
$$\left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - \sum_{i=0}^{l} b_i\right| \leq |b_{N+1}| + \cdots + |b_{N+k}| < \epsilon$$
für ein genügend grosses $k \geq 1$.

Daraus folgt mit $S := \sum_{i=0}^{\infty} b_i$:
$$\left|\sum_{i=0}^{m} S_i - S\right| < \epsilon$$
sowie
$$\left|\sum_{j=0}^{n} U_j - S\right| < \epsilon$$
woraus
$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = S = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$$
folgt. □

Wir können jetzt das Cauchy Produkt zweier Reihen behandeln.
Falls wir das Produkt von
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$
berechnen wollen, müssen wir eine Art finden, die Einträge der Matrix
$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_0 & a_3b_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{array}$$
zu summieren.

Definition 2.60. *Das* **Cauchy Produkt** *der Reihen*
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$
ist die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

Übung 2.61. Zeige, dass das Cauchy Produkt der Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

mit sich selbst divergiert.
Lösungsskizze:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} a_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}(-1)^j}{\sqrt{n-j+1}\sqrt{j+1}}\right| = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}}$$

Da

$$(n+1-j)(j+1) \leq (n+1)^2$$

folgt

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1-j)(j+1)}} \geq \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Satz 2.62. *Falls die Reihen*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

Beweis. Direkte Anwendung von Satz 2.59. □

Anwendung 2.63.

$$\forall z, w \in \mathbb{C}: \ \exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$$

Wir berechnen das Cauchy Produkt der Reihen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w^i}{i!}\,, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

Dies ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!}\right)$$

Nun ist

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{z^j}{j!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^{n-j} z^j = \frac{(w+z)^n}{n!}$$

woraus die Behauptung folgt.

Zum Abschluss behandeln wir noch das Problem, ob man Summation und Limes vertauschen kann. In diesem Zusammenhang wird es nützlich sein, eine Folge in $\mathbb{R}$ als eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

aufzufassen.

Satz 2.64. *Sei* $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Folge. Wir nehmen an, dass:*

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ *existiert* $\quad \forall j \in \mathbb{N}$.
2. *Es gibt eine Funktion* $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty[$, *so dass*

   2.1 $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \ \forall n \geq 0.$

   2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ *konvergiert.*

Dann folgt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j).$$

Korollar 2.65. *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert die Folge* $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k}\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \qquad (*)$$

Sei also:

$$f_n(k) = \begin{cases} \dfrac{z^k}{k!}\dfrac{n!}{(n-k)!n^k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k \geq n+1. \end{cases}$$

Für jedes $k \geq 0$ folgt aus $(*)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(k) = \frac{z^k}{k!} = f(k).$$

Zudem:
$$|f_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!} = g(k)$$
Und wir hatten schon gezeigt, dass
$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$
konvergiert. Das Korollar folgt dann aus Satz 2.64. □

Aus Korollar 2.65 und Beispiel 2.15 folgen
$$\exp(1) = e \quad \text{und} \quad \exp(n) = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(1)^n = e^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Deswegen werden wir oft für $\exp(z)$ die Notation e^z verwenden.

3 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel füren wir den Begriff der stetigen Funktion ein und beweisen einige grundlegende Sätze wie den Zwischenwertsatz, das Max-Min Theorem und den Satz über die Umkehrabbildung. Der Begriff der stetigen Funktion wurde von Cauchy in seinem "Cours d'Analyse" 1821 eingeführt; die moderne ϵ-δ-Definition geht auf Weierstrass 1874 zurück.

3.1 Reellwertige Funktionen

Sei D eine beliebige Menge. Die Menge $\mathbb{R}^D$ aller Funktionen
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
bildet ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei Addition und skalare Multiplikation gegeben sind durch:
$$\begin{gathered}(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)\end{gathered}$$
wobei $f_1, f_2, f \in \mathbb{R}^D$, $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^D$ gibt es auch ein Produkt:
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$
Eine konstante Funktion ist eine, die immer denselben Wert annimmt; darunter gibt es die Funktionen $\mathit{0}, \mathit{1} \in \mathbb{R}^D$:
$$\begin{aligned}\mathit{0}(x) &= 0 \qquad \forall x \in D \\ \mathit{1}(x) &= 1 \qquad \forall x \in D.\end{aligned}$$
Offensichtlich gilt $f + \mathit{0} = f$, $g \cdot \mathit{1} = g \quad \forall f, g \in \mathbb{R}^D$; $\mathbb{R}^D$ versehen mit $+, \cdot$ erfüllt die Körperaxiome **ausser**: Falls $\operatorname{card} D \geq 2$ gibt es immer ein $f \neq \mathit{0}$, das kein multiplikatives

Inverses besitzt.
Auf $\mathbb{R}^D$ definieren wir eine Ordnung

$$f \leq g \text{ falls } f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in D$$

und sagen f ist nicht negativ, falls

$$0 \leq f.$$

Wir führen rasch einige Begriffe für reellwertige Funktionen ein, die sich an den analogen Begriffen für Folgen anlehnen.

Definition 3.1. *Sei* $f \in \mathbb{R}^D$.

1. f *ist* **nach oben beschränkt**, *falls* $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ *nach oben beschränkt ist.*
2. f *ist* **nach unten beschränkt**, *falls* $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ *nach unten beschränkt ist.*
3. f *ist* **beschränkt**, *falls* $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ *beschränkt ist.*

Falls $D \subseteq \mathbb{R}$ gibt es folgende Monotoniebegriffe:

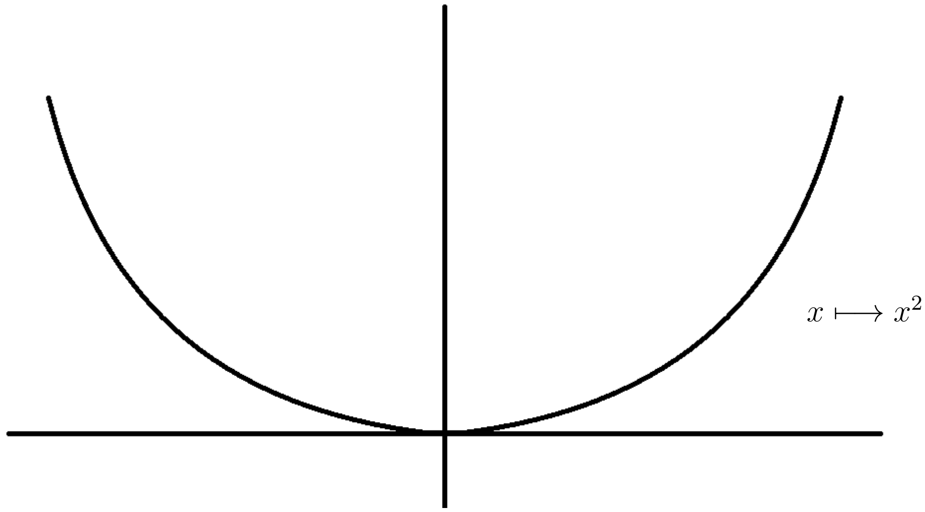
Definition 3.2. *Eine Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *wobei* $D \subseteq \mathbb{R}$, *ist*

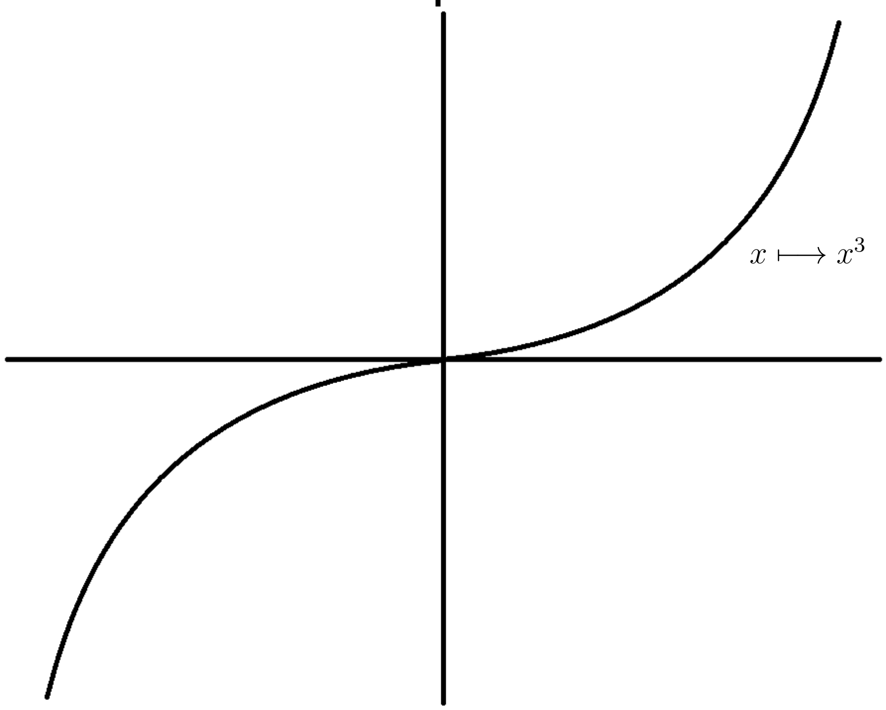
1. **monoton wachsend**, *falls* $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
2. **streng monoton wachsend**, *falls* $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$
3. **monoton fallend**, *falls* $\forall x, y \in D$
$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
4. **streng monoton fallend**, *falls* $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) > f(y)$$
5. **monoton**, *falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend*
6. **streng monoton**, *falls* f *streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beispiel 3.3. Sei $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

ist genau dann (streng) monoton wachsend, falls n ungerade ist:





3.2 Stetigkeit

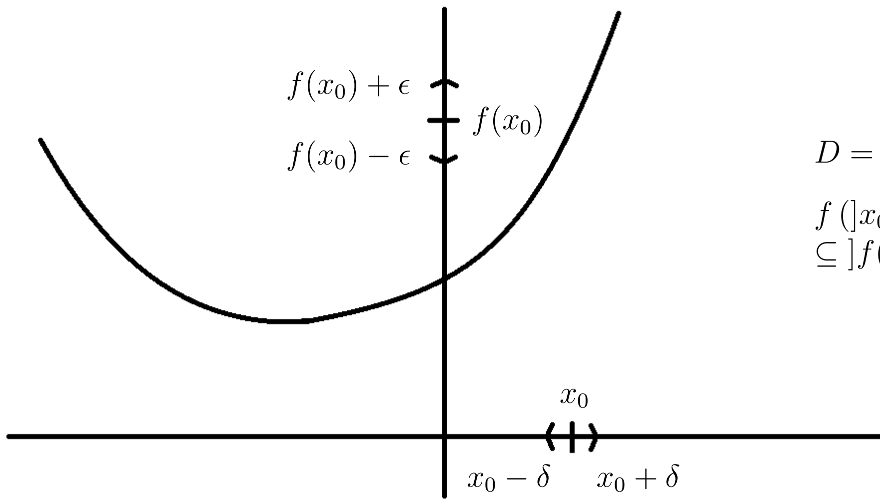
Definition 3.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist* **in x_0 stetig**, *falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt.

Definition 3.5. *Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist* **stetig**, *falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.*

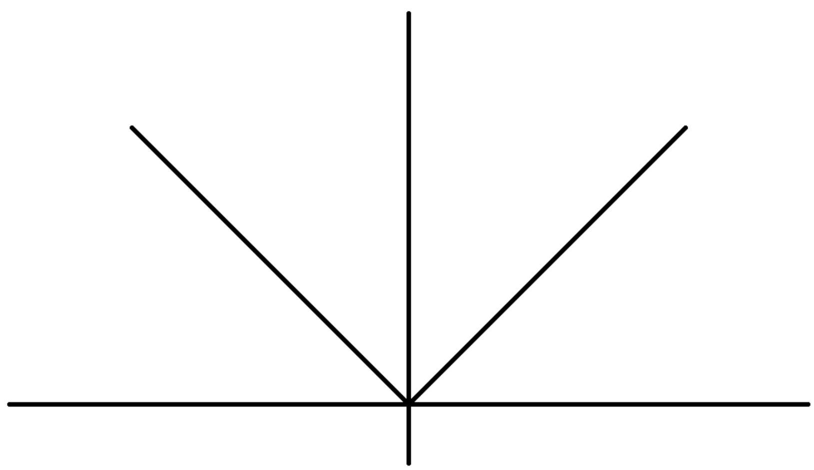
Beispiel 3.6. 1. Sei $n \geq 0 :$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^n$ ist stetig.



$D = \mathbb{R}$

$f\left(]x_0-\delta, x_0+\delta[\right)$
$\subseteq\,]f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon[$

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto |x|$ ist stetig.



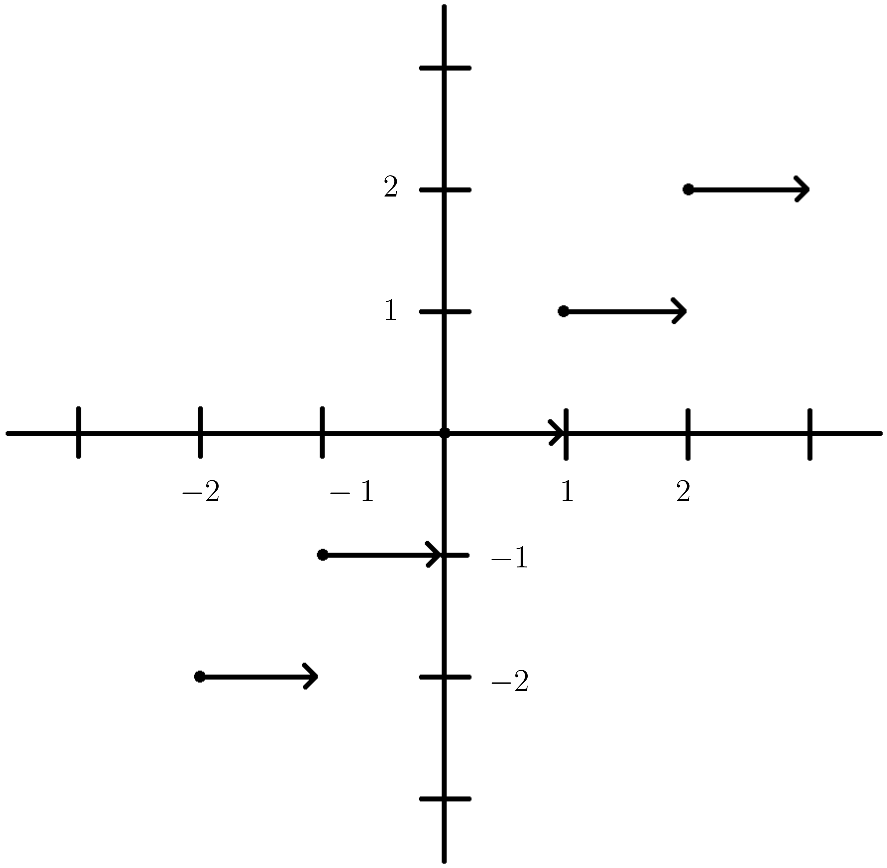
3. Die Abrundungsfunktion

$$\lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \lceil x\rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} :\ m \le x\}$$

ist in jedem Punkt $x_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig; sie ist in keinem Punkt $y \in \mathbb{Z}$ stetig.
Falls $D := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dann ist

$$\lceil\cdot\rceil : D \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \lceil x\rceil$$

stetig.



4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   ist genau in $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ stetig und in keinem anderen Punkt.

Es gibt eine sehr nützliche Charakterisierung der Stetigkeit mittels konvergenter Folgen:

Satz 3.7. *Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D folgende Implikation gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Beweis. ($\implies$): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Sei nun $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - x_0| < \delta \qquad \forall n \geq N.$$

Dann folgt

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \forall n \geq N$$

und daher:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

($\Longleftarrow$): Annahme: f ist in x_0 nicht stetig. Es gibt also $\epsilon > 0$, so dass

$$f\left(]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap D\right) \not\subset \left]f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon\right[\qquad \forall\delta > 0.$$

Insbesondere gibt es für jedes $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$ $\left(\text{mit } \delta = \dfrac{1}{n}\right)$ ein

$$a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap D$$

mit

$$f(a_n) \notin \left]f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon\right[.$$

Damit entsteht eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

und

$$|f(a_n) - f(x_0)| \geq \epsilon \qquad \forall n \geq 1.$$

Somit kann die Folge $(f(a_n))_{n\geq 1}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. $\square$

Aus dem entsprechenden Satz für Folgen (Satz 2.8) erhalten wir mit Satz 3.7:

Korollar 3.8. *Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in x_0.*

1. *Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ stetig in x_0.*
2. *Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist*

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : D \cap \{x \in D :\ g(x) \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

stetig in x_0.

Definition 3.9. *Eine* **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist eine Funktion der Form*

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei : $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. *Falls $a_n \neq 0$ ist n der* **Grad** *von P.*

Korollar 3.10. *Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.*

Korollar 3.11. *Seien P, Q polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq \mathbf{0}$. Seien $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist*

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots x_m\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

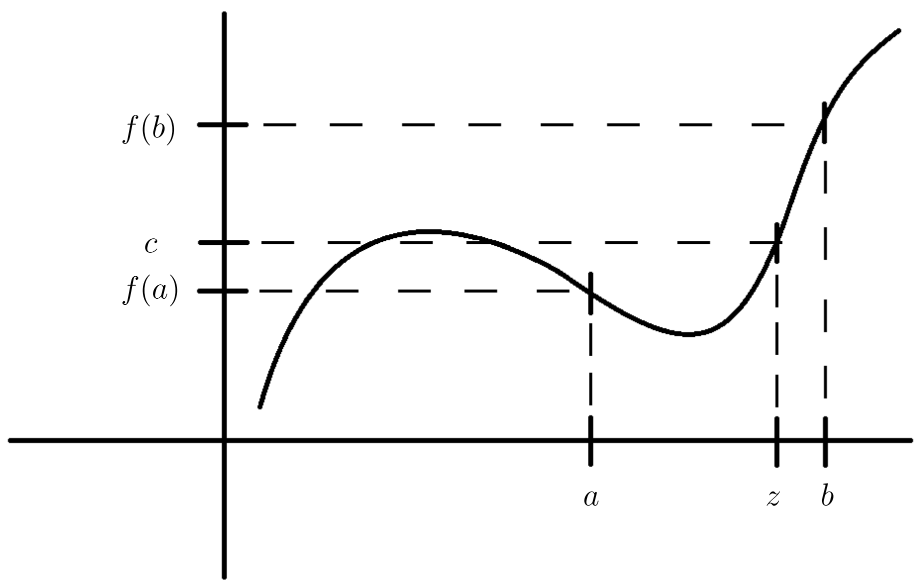
stetig.

3.3 Der Zwischenwertsatz

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: dann liegt c zwischen x_1 und x_2 falls:

1. $x_1 \leq x_2, \quad c \in [x_1, x_2]$
2. $x_2 \leq x_1, \quad c \in [x_2, x_1]$.

Satz 3.12 (Bolzano 1817)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b, \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.*



Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.d.A) können wir

$$a \leq b \quad \text{und} \quad f(a) \leq f(b)$$

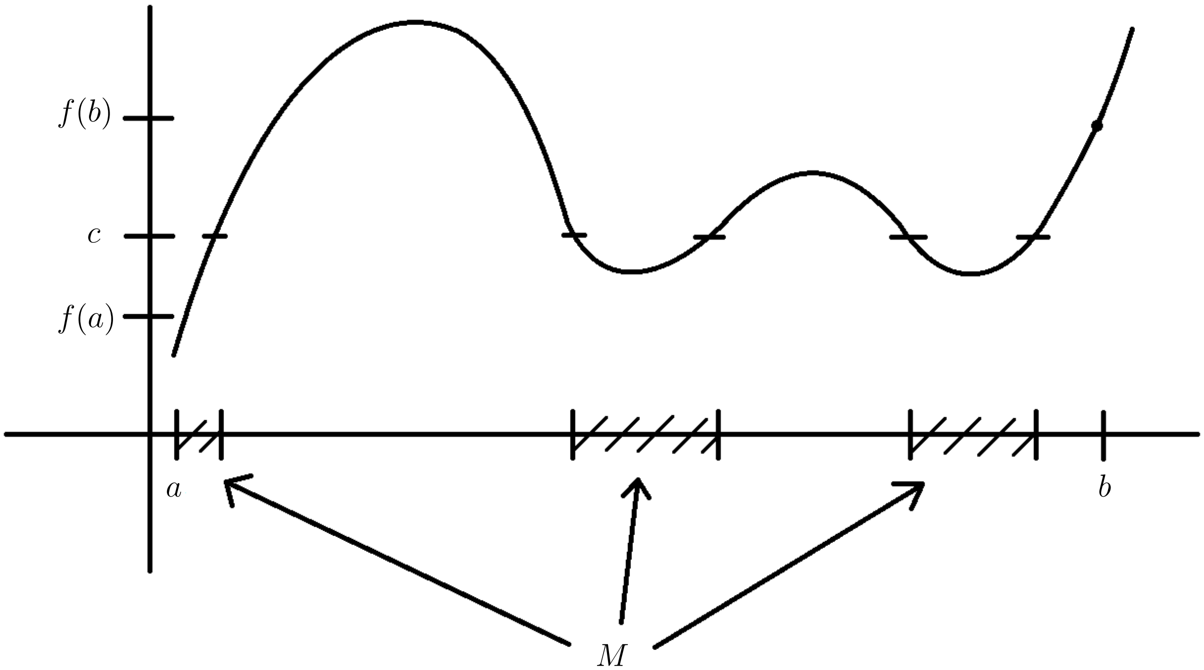
annehmen. Sei also : $f(a) \leq c \leq f(b)$. Wir definieren:

$$M = \{x \in [a, b] : \ f(x) \leq c\}$$

Sei $z := \sup M$, wir zeigen

$$f(z) = c.$$

Zunächst bemerken wir, dass $\sup M$ existiert: $a \in M$, insbesondere $M \neq \emptyset$ und $M \subseteq [a, b]$, insbesondere ist M beschränkt.

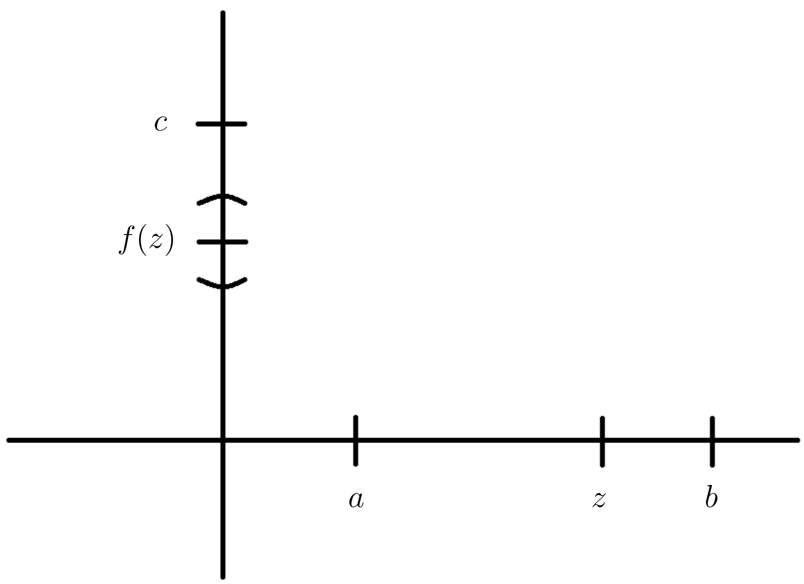


Wir zeigen, dass $f(z) = c$ mittels einem Widerspruchsbeweis.

1. Anname $\underline{f(z) < c:}$ Insbesondere gilt

$$z < b$$

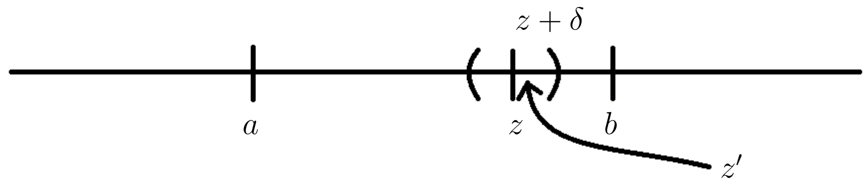
da sonst aus $z = b$, $f(z) = f(b) \geq c$ folgt, entgegen der Annahme $f(z) < c$.



Sei nun $\epsilon = \dfrac{c - f(z)}{2}$ und sei $\delta > 0$ dementsprechend, so dass:

$$f\left(]z - \delta, z + \delta[\cap [a, b]\right) \subseteq \,]f(z) - \epsilon, f(z) + \epsilon[\,.$$

Da $z < b$ folgt $]z, z + \delta[\cap [a, b] \neq \emptyset$.



Sei also $z' \in \,]z, z+\delta[\, \cap [a,b]$. Dann folgt:

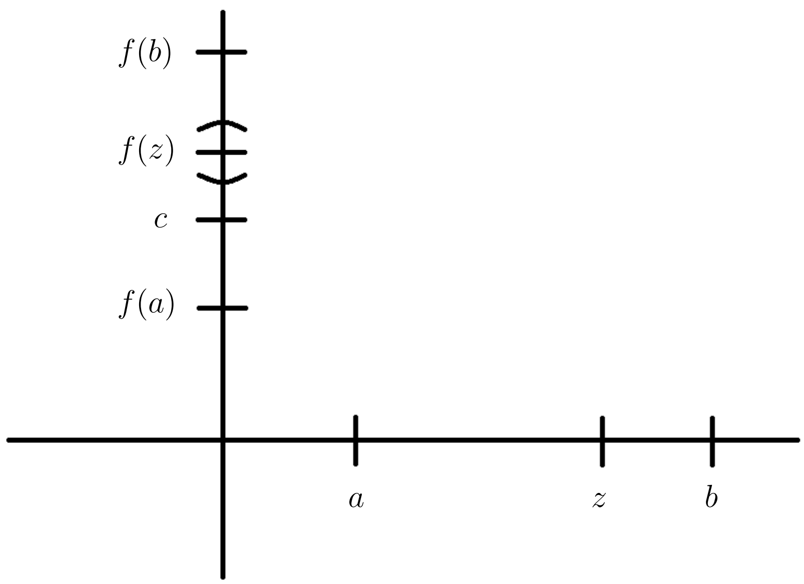
$$f(z') \in \,]f(z)-\epsilon, f(z)+\epsilon[$$

insbesondere

$$f(z') < f(z)+\epsilon < f(c).$$

Zusammen mit $z' > z$ führt dies zu einem Widerspruch mit der Definition von $\sup M$.

2. Annahme $\underline{f(z) > c:}$



Sei $\epsilon = \dfrac{f(z)-c}{2}$ und $\delta > 0$, so dass

$$f\left(]z-\delta, z+\delta[\, \cap [a,b]\right) \subseteq \,]f(z)-\epsilon, f(z)+\epsilon[\,.$$

Da $z = \sup M$ folgt $]z-\delta, z] \cap M \neq \emptyset$.
Sei also $x \in \,]z-\delta, z] \cap M$. Es folgt dann $f(x) \leq c \;\; (x \in M)$ und

$$f(x) \in \,]f(z)-\epsilon, f(z)+\epsilon[$$

insbesondere

$$f(x) > f(z)-\epsilon > c.$$

Dies führt zu einem Widerspruch. Da beide Annahmen (1) und (2) zu einem Widerspruch führen, folgt $f(z) = c$ und der Satz ist bewiesen. $\square$

Korollar 3.13. *Sei* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *ein Polynom mit* $a_n \neq 0$ *und* n *ungerade. Dann besitzt* P *mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$*.*

Bemerkung 3.14. Für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis. O.E.d.A können wir $a_n = 1$ annehmen. Für $x \neq 0$ betrachte:

$$\frac{P(x)}{x^n} = \underbrace{1 + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \cdots + a_0 x^{-n}}_{Q(x)}$$

Da

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^j = 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

und

$$\lim_{m\to\infty} \left(-\frac{1}{m}\right)^j = 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

gibt es $N \in \mathbb{N},\ N \geq 1$, so dass:

$$\frac{1}{2} \leq Q(N) \leq \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq Q(-N) \leq \frac{3}{2}$$

Daraus folgt

$$P(N) = N^n Q(N) > 0, \quad P(-N) = (-N)^n Q(-N) < 0 \ \text{ (n ungerade).}$$

Der Zwischenwertsatz angewendet auf

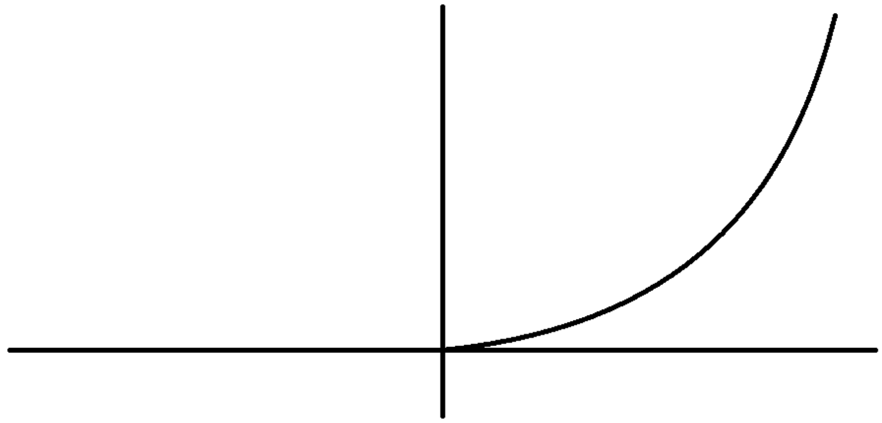
$$P : [-N, N] \longrightarrow \mathbb{R}$$

garantiert dann die Existenz von $z \in [-N, N]$ mit $P(z) = 0$. $\square$

3.4 Der Min-Max Satz

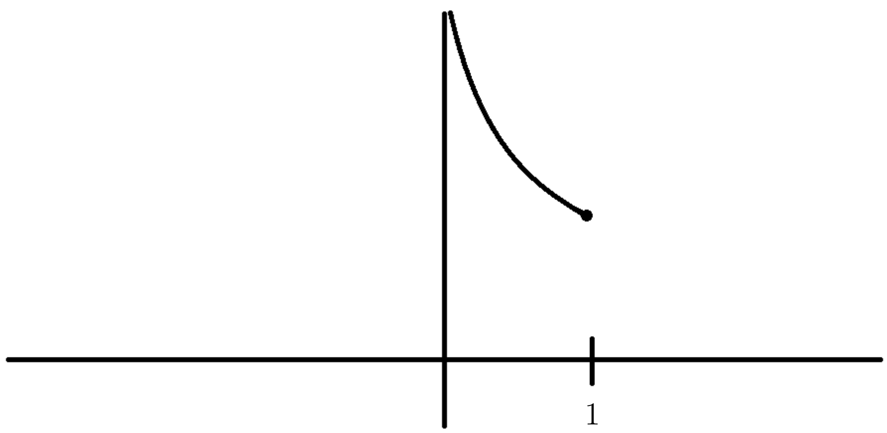
In diesem Abschnitt zeigen wir, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist und zudem ein Maximum und ein Minimum annimmt.
Wir betrachten zunächst folgende Beispiele:

Beispiel 3.15. 1. $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$



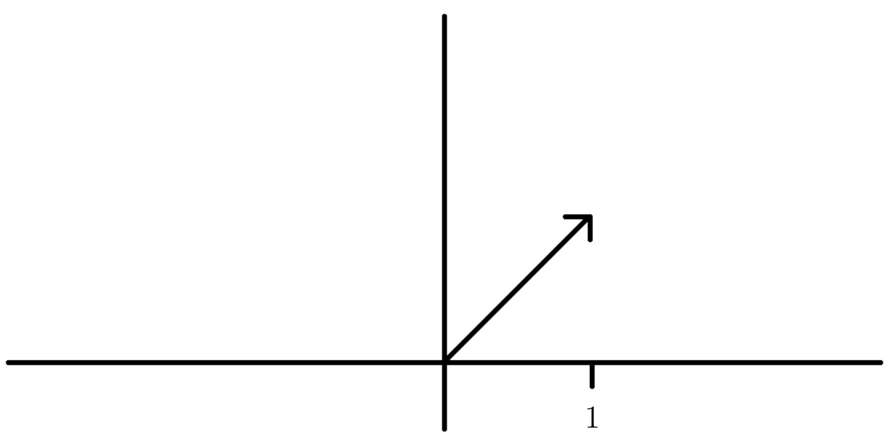
ist stetig aber nicht beschränkt.

2. $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$



ist stetig aber nicht beschränkt.

3. $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$



ist stetig, beschränkt, nimmt aber kein Maximum an: es gibt kein $a \in [0,1[$, so dass $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [0,1[$.

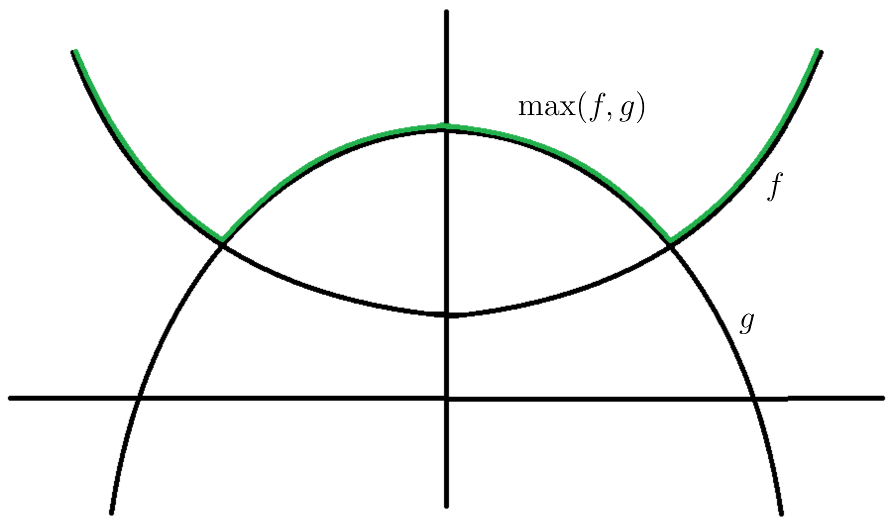
Definition 3.16. *Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist* **kompakt**, *falls es von der Form*

$$I = [a,b], \qquad a \leq b$$

ist.

Als Vorbereitung zum Beweis führen wir noch folgende Begriffe ein:
Seien allgemein D eine Menge und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} |f|(x) &:= |f(x)|, \qquad \forall x \in D \\ \max(f,g)(x) &:= \max\left(f(x), g(x)\right), \qquad \forall x \in D \\ \min(f,g)(x) &:= \min\left(f(x), g(x)\right), \qquad \forall x \in D. \end{aligned}$$



Lemma 3.17. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f,\, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind

$$|f|,\ \max(f,g),\ \min(f,g)$$

stetig in x_0.

Beweis. 1. Zu $|f|$: Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass $\forall x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt. Dann folgt:

$$||f|(x) - |f|(x_0)| = ||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

und somit ist $|f|$ stetig.

2. Zunächst bemerken wir: $\forall u, v \in \mathbb{R}$:

$$\max(u,v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}\,, \qquad \min(u,v) = \frac{u+v-|u-v|}{2}$$

Folglich:

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}\,, \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Aus Korollar 3.8(1) folgt, dass $f+g$ und $f-g$ in x_0 stetig sind; aus (1) folgt dann, dass $|f-g|$ in x_0 stetig ist. Wiederholte Anwendung von Korollar 3.8(1) impliziert dann, dass $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ in x_0 stetig sind.

□

Eine wesentliche Eigenschaft kompakter Intervalle wollen wir hier hervorheben.

Lemma 3.18. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a,b]$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b].$$

Beweis. Aus $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \geq 1$ folgt mit Satz 2.8(4):

$$a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b.$$

□

Satz 3.19. *Sei $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit*

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad \forall x \in I.$$

Insbesondere ist f beschränkt.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz von v mit der Eigenschaft $f(x) \leq f(v)$ für alle $x \in [a,b]$. Sei

$$g(x) = \max\left(1, \frac{3}{2} - f(a) + f(x)\right).$$

Dann ist $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 1$.
Dann folgt aus Korollar 3.8(2), dass

$$\frac{1}{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{g(x)}$$

stetig ist.
Nun gilt $0 < \dfrac{1}{g(x)}$ für alle $x \in [a,b]$, also existiert

$$s := \inf\left\{\frac{1}{g(x)} : x \in [a,b]\right\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ gibt es per Definition des Infimums ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$s \leq \frac{1}{g(x_n)} < s + \frac{1}{n}.$$

Nach Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $\left(x_{l(n)}\right)_{n\geq 1}$ die konvergiert, denn $(x_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt. Sei

$$v := \lim_{n\to\infty} x_{l(n)}.$$

Dann folgt aus Lemma 3.18, dass

$$v \in [a,b].$$

Aus der Stetigkeit von $\dfrac{1}{g}$ und Satz 3.7 folgt:

$$s \leq \frac{1}{g(v)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(x_{l(n)})} \leq s + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l(n)} = s + 0$$

und somit folgt

$$\frac{1}{g(v)} = s.$$

Insbesondere:

$$\frac{1}{g(v)} \leq \frac{1}{g(x)} \qquad \forall x \in [a,b],$$

das heisst

$$g(x) \leq g(v) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Aus der Definition von g folgt:

$$\frac{3}{2} - f(a) + f(x) \leq g(v) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Da

$$g(a) = \max\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

folgt

$$g(v) = \max\left(1, \frac{3}{2} - f(a) + f(v)\right) \geq \frac{3}{2}$$

woraus

$$g(v) = \frac{3}{2} - f(a) + f(v)$$

folgt. Wir haben gezeigt: $\forall x \in [a,b]:$

$$\frac{3}{2} - f(a) + f(x) \leq \frac{3}{2} - f(a) + f(v)$$

woraus

$$f(x) \leq f(v)$$

folgt. Wir können dies jetzt auf $-f$ anwenden und erhalten die Existenz von $u \in [a,b]$ mit

$$-f(x) \leq -f(u) \qquad \forall x \in [a,b],$$

das heisst

$$f(u) \leq f(x)$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

3.5 Der Satz über die Umkehrabbildung

Im Kontext der Umkehrabbildung stellt sich allgemein die Frage der Stetigkeit unter Verknüpfung.

Satz 3.20. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f : D_1 \longrightarrow D_2$, $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist*

$$g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

in x_0 stetig.

Beweis. Wir wollen das Stetigkeitskriterium (Satz 3.7) anwenden.
Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D_1 mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0.$$

Da f stetig in x_0 folgt (mit Satz 3.7)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

und da g in $f(x_0)$ stetig, folgt (mit Satz 3.7)

$$\lim_{n\to\infty} g\left(f(a_n)\right) = g\left(f(x_0)\right)$$

woraus (mit Satz 3.7) die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 folgt. □

Korollar 3.21. *Falls in Satz 3.20 f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig.*

Satz 3.22. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist stetig, streng monoton.*

Beweis. Wir führen den Beweis im Fall $I = [a, b]$ wobei $a \leq b$ und nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist.
Aus $a \leq x \leq b$ folgt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Somit ist $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$ ein $z \in [a, b]$ gibt mit $f(z) = c$. Folglich:

$$J = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

und J ist ein Intervall. Insbesondere ist $f : [a, b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ surjektiv; f ist zudem injektiv da streng monoton wachsend.
Sei $f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b]$ die Umkehrabbildung. Wir beweisen die Stetigkeit von f^{-1}.
Sei $y \in [f(a), f(b)]$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[f(a), f(b)]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n),\ x = f^{-1}(y)$. Falls $(x_n)_{n\geq 1}$ nicht gegen x konvergiert, gibt es $\epsilon > 0$, so dass
$$\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \notin]x-\epsilon, x+\epsilon[\}$$
unendlich ist. Es gibt also eine Teilfolge $\left(x_{l(n)}\right)_{n\geq 1}$ $\ (l : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*)$ mit

$$\left|x_{l(n)} - x\right| \geq \epsilon \qquad \forall n \geq 1.$$

Nach Bolzano-Weierstrass (bemerke $[a,b]$ ist beschränkt) gibt es eine Teilfolge $\left(x_{l(l'(n))}\right)_{n\geq 1}$ die konvergiert. Sei $z \in [a,b]$ deren Grenzwert:

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{l(l'(n))}.$$

Dann folgt aus $\left|x_{l(l'(n))} - x\right| \geq \epsilon$, dass

$$|z - x| \geq \epsilon$$

und aus der Stetigkeit von f:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{l(l'(n))}\right) = \lim_{n\to\infty} y_{l(l'(n))} = y = f(x).$$

Also ein Widerspruch zur Injektivität von f. Dies beweist die Stetigkeit von f^{-1}. □

Beispiel 3.23. Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
[0,\infty[&\longrightarrow [0,\infty[\\
x &\longmapsto x^n
\end{aligned}$$

streng monoton wachsend, stetig und surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng monoton wachsende stetige Umkehrabbildung

$$\begin{aligned}
[0,\infty[&\longrightarrow [0,\infty[\\
x &\longmapsto \sqrt[n]{x}
\end{aligned}$$

genannt die n-te Wurzel.

3.6 Die reelle Exponentialfunktion

In Beispiel 2.54 haben wir die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch eine in ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergente Potenzreihe definiert:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Wir studieren jetzt eingehender diese Funktion für $z \in \mathbb{R}$.

Satz 3.24. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ *ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

Wir zeigen einige Eigenschaften von exp, die von unabhängigem Interesse sind. Mit

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq 1$$

für $x \geq 0$ folgt mit

$$\exp(-x)\exp(x) = 1 \qquad \text{(siehe 2.63)}$$

dass:

Korollar 3.25.

$$\exp(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Potenzreihendarstellung von exp folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \qquad \forall x > 0.$$

Falls jetzt $y < z$, dann folgt (aus 2.63):

$$\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y)\exp(z - y)$$

und da $\exp(z - y) > 1$, folgt:

Korollar 3.26.

$$\exp(z) > \exp(y) \qquad \forall z > y.$$

Eine Ungleichung, die wir im Stetigkeitsbeweis benützen werden, ist:

Korollar 3.27.

$$\exp(x) \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dafür benützen wir (siehe Korollar 2.65)

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ und N, so dass

$$\frac{x}{N} > -1$$

woraus natürlich

$$\frac{x}{n} > -1 \qquad \forall n \geq N$$

folgt. Für alle $n \geq N$ folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{x}{n}\right) = 1 + x$$

woraus mit Satz 2.8(4)

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

folgt.

Beweis von Satz 3.24. Aus (3.25) folgt $\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[$ und aus (3.26) folgt, dass exp streng monoton wachsend ist.
Zur Stetigkeit:
<u>Schritt 1:</u> Stetigkeit in 0.

Sei $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, dann folgt aus $\exp(x) \geq 1 + x$ für dieses x, dass

$$\exp(-x) \leq \frac{1}{1+x}.$$

Wir können x und $-x$ vertauschen und erhalten also $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

woraus

$$x \leq \exp(x) - \exp(0) \leq \frac{x}{1-x}$$

und somit

$$|\exp(x) - \exp(0)| \leq 2|x| \qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

folgt. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Dann folgt $\forall |x| < \delta$:

$$|\exp(x) - \exp(0)| \leq 2|x| < 2\delta \leq \epsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit in 0 bewiesen.
<u>Schritt 2:</u> Stetigkeit überall.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir:

$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0 + (x - x_0)) - \exp(x_0) = \exp(x_0)\left[\exp(x - x_0) - \exp(0)\right]$$

Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2\exp(x_0)}\right)$. Dann folgt: für alle $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}|\exp(x) - \exp(x_0)| &= \exp(x_0) \cdot |\exp(x - x_0) - \exp(0)| \\ &\leq \exp(x_0) \cdot 2 \cdot |x - x_0| \\ &< \exp(x_0) \cdot 2 \cdot \frac{\epsilon}{2\exp(x_0)} = \epsilon.\end{aligned}$$

<u>Surjektivität:</u>

Wir bemerken, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2$$

und somit $e \geq 2$.
Daraus folgt

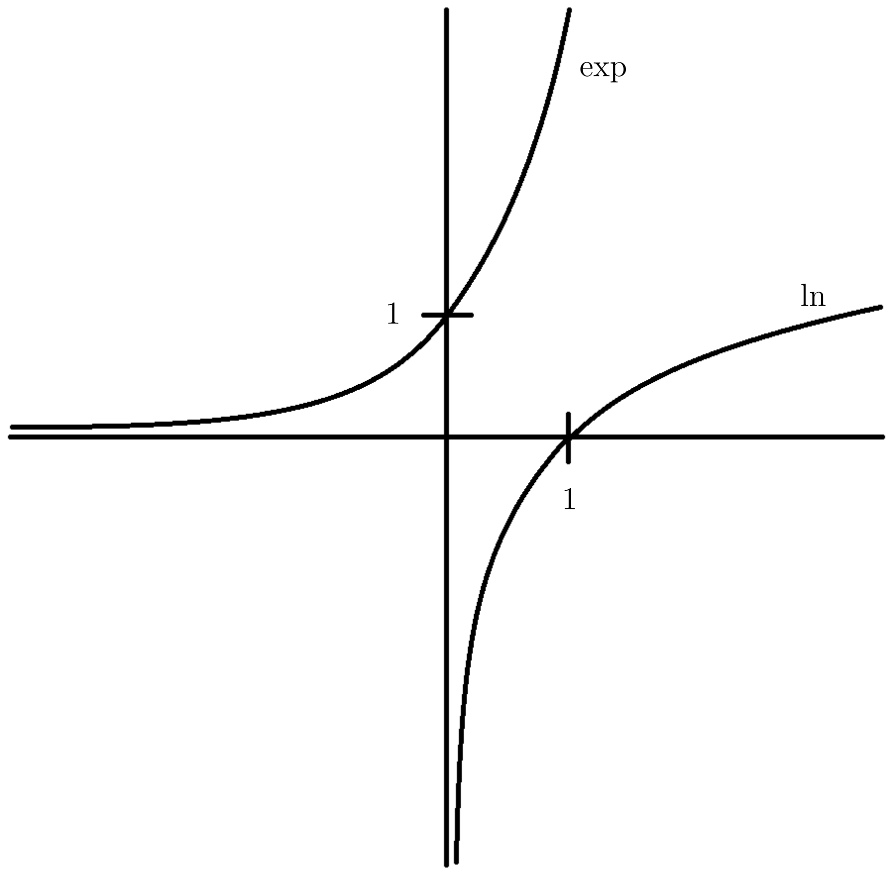
$$\exp(n) = e^n \geq 2^n \qquad \forall n \geq 0$$

und
$$\exp(-n) = \exp(n)^{-1} = e^{-n} \leq 2^{-n}.$$
Also ist nach dem Zwischenwertsatz
$$\left[2^{-n}, 2^{n}\right] \subseteq \exp\left([-n, n]\right)$$
und somit
$$]0, +\infty[= \bigcup_{n \geq 1} \left[2^{-n}, 2^{n}\right] \subseteq \exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[\,.$$
Daraus folgt $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ und der Satz ist bewiesen. □

Die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ nennen wir den **natürlichen Logarithmus** und bezeichnen sie mit ln.

Korollar 3.28. *Der natürliche Logarithmus*
$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des weiteren gilt
$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \qquad \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

Beweis. Aus Satz 3.24 folgt, dass
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$$
streng monoton wachsend, stetig und bijektiv ist. Unter Anwendung von Satz 3.22 mit $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$ und $f = \exp$ folgt, dass $f^{-1} = \ln$,
$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
stetig, streng monoton und bijektiv ist.
Seien $a, b \in]0, +\infty[$: Aus Anwendung von 2.63 folgt:
$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b).$$
Da exp die Umkehrfunktion von ln ist, folgt:
$$\exp(\ln a) \exp(\ln b) = ab = \exp(\ln(ab))$$
Daraus folgt:
$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln ab).$$
Da exp injektiv ist, folgt:
$$\ln a + \ln b = \ln ab.$$
□



Wir können jetzt Logarithmus und Exponentialfunktion benützen, um allgemeine Potenzen zu definieren. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir:

$$x^a := \exp(a \ln x).$$

Insbesondere: $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$.

Korollar 3.29. *1. Für* $a > 0$ *ist*

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.

2. Für $a < 0$ *ist*

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.

3. $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$.

4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$.

5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0\,.$

Beweis. 1. Für $a > 0$ ist mit $x \longmapsto \ln x$ auch $x \longmapsto a \ln x$ streng monoton wachsend. Da $x \longmapsto \exp x$ streng monoton wachsend, folgt, dass

$$x \longmapsto x^a = \exp(a \ln x)$$

streng monoton wachsend ist.
Ausserdem ist $x \longmapsto x^a$ eine Verknüpfung stetiger Funktionen und deswegen nach Satz 3.20 auch stetig.

2. Analog wie (1). Es ist zu bemerken, dass für $a < 0$, $x \longmapsto a \ln x$ streng monoton fallend ist.

3. $$\ln(x^a) = \ln \exp(a \ln x) = a \ln x$$

4. $$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= \exp(a \ln x) \exp(b \ln x) = \exp(a \ln x + b \ln x) \\ &= \exp((a+b) \ln x) = x^{a+b}. \end{aligned}$$

5. $$(x^a)^b = \exp(b \ln(x^a))$$

   Aus (3) folgt $\ln(x^a) = a \ln x$, woraus folgt:

$$(x^a)^b = \exp(ba \ln x) = x^{a \cdot b}.$$

□

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei D eine Menge. Analog zur Definition einer Folge reeller Zahlen ist eine (reellwertige) Funktionenfolge eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^D \\ n &\longmapsto f(n). \end{aligned}$$

Wie im Fall der Folgen bezeichnen wir $f(n)$ mit f_n und die Funktionenfolge mit $(f_n)_{n \geq 0}$. Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$.

Definition 3.30. *Die Funktionenfolge* $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** *gegen eine Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, *falls für alle* $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Beispiel 3.31. Sei $D = [0,1]$ und

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

Dann folgt aus Beispiel 2.12:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \forall 0 \le x < 1.$$

Ausserdem gilt $f_n(1) = 1^n = 1$. Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Bemerke: die Funktionen f_n sind alle stetig in $[0,1]$, die Funktion f ist nicht stetig in 1.

Um zu garantieren, dass der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist, braucht es zusätzliche Voraussetzungen.

Definition 3.32. *(Weierstrass 1841) Die Folge*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmässig *in D gegen*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

falls gilt: $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1$, *so dass:*

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in D: \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

In dieser Definition ist es wichtig, dass N nur von ϵ und nicht von $x \in D$ abhängt. Deswegen kommt die Bedingung "$\forall x \in D$" nach der Bedingung "$\exists N \geq 1$".

Satz 3.33. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Sei $N \geq 1$, so dass (gleichmässige Konvergenz):

$$|f(x) - f_N(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in D.$$

Da f_N in x_0 stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon.$$

Es folgt dann für $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\epsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{<\epsilon} + \underbrace{|f(x_0) - f_N(x_0)|}_{<\epsilon} \\ &< 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

Definition 3.34. *Eine Funktionenfolge*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist **gleichmässig konvergent***, falls für alle* $x \in D$ *der Grenzwert*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ *gleichmässig gegen* f *konvergiert.*

Aus dem Cauchy Kriterium (Satz 2.20) für Folgen folgt:

Korollar 3.35. *Die Funktionenfolge*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmässig in D*, falls:*
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1$*, so dass* $\forall n, m \geq N$ *und* $\forall x \in D$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Beweis. Übung. □

Korollar 3.36. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$. *Falls* $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 3.35 und Satz 3.33. □

Sei nun $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen.

Definition 3.37. *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *konvergiert gleichmässig (in* D*), falls die durch*

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.38. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und*

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \qquad \forall x \in D$$

und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergiert. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmässig in D *und deren Grenzwert*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D *stetige Funktion.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und $N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N$ und $k \geq 1$:

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \epsilon.$$

Dann folgt für

$$S_n(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j(x) :$$

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \epsilon \qquad \forall x \in D.$$

Also ist nach Korollar 3.35 die Funktionenfolge $(S_n)_{n\geq 0}$ in D gleichmässig konvergent und deshalb ist nach Korollar 3.36

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

in D stetig. □

Wir wenden diesen Satz jetzt auf das Studium von Potenzreihen an. Sei (vergleiche mit Korollar 2.57) $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Definition 3.39. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat **positiven Konvergenzradius**, *falls* $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ *existiert.*
Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \textit{falls} \quad \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \textit{falls} \quad \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0. \end{cases}$$

In Korollar 2.57 hatten wir gezeigt, dass für alle $|x| < \rho$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

absolut konvergiert. Sei also

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Satz 3.40. *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und sei*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ *konvergiert*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, *insbesondere ist* $f :]-\rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. Sei $f_k(x) = c_k x^k, \ k \geq 0$. Dann ist f_k auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Für $|x| \leq r$ gilt auch:

$$|f_k(x)| = \left|c_k x^k\right| \leq |c_k| r^k.$$

Da nach Korollar 2.57 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konvergiert, folgt aus Satz 3.38, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

auf $[-r, r]$ gleichmässig konvergiert. Insbesondere ist

$$f : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Da dies für alle $r < \rho$ gilt, folgt, dass

$$f :]-\rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. $\square$

3.8 Trigonometrische Funktionen

Die in 1.3 benützten Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind nicht wirklich definiert worden, da wir den Begriff des Winkelmasses nie definiert hatten. Auch ist die "Zahl" π nicht streng definiert. Dies wollen wir jetzt nachholen.
Wir definieren die Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und die Cosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz 2.53) folgt, analog zum Fall der Exponentialfunktion (Beispiel 2.54), dass beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren. Deswegen ist in beiden Fällen deren Konvergenzradius $+\infty$ und es folgt aus Satz 3.40:

Satz 3.41. $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sind stetige Funktionen.*

Weitere Eigenschaften der Sinus und Cosinusfunktion ergeben sich durch ihren Zusammenhang mit der Exponentialfunktion.

Satz 3.42.

1. $\exp iz = \cos(z) + i\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $\cos z = \cos(-z)$ *und* $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
3. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
   $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$
5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Beweis. 1.
$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}$$

nach Satz 2.40(1):
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Jetzt bemerken wir: $i^{2n} = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i\,(-1)^n$ woraus folgt:
$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

2. Folgen aus der Definition.
3. Aus $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ und aus (2) folgt:
$$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$$
woraus (3) folgt (durch Subtraktion respektive Addition der beiden Identitäten).
4. Es gilt
$$\begin{aligned} e^{i(z+w)} &= e^{iz}e^{iw} \qquad (2.63) \\ &= (\cos(z) + i\sin(z))\,(\cos(w) + i\sin(w)) \\ &= \{\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\} + i\,\{\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\} \end{aligned}$$
und analog
$$\begin{aligned} e^{-i(z+w)} &= e^{-iz}e^{-iw} \\ &= (\cos(z) - i\sin(z))\,(\cos(w) - i\sin(w)) \\ &= \{\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\} - i\,\{\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\}\,. \end{aligned}$$
Durch Addition (respektive Subtraktion) beider Identitäten und Benützung von
$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} \\ \sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} \end{aligned}$$
erhalten wir die Additionsformeln.
5. Setze $z = -w$ in die Additionsformel für $\cos(z+w)$.

□

Wir bemerken, dass sich aus den Additionsformeln die Winkelverdopplungsformeln ergeben:

Korollar 3.43.
$$\begin{aligned} \sin(2z) &= 2\sin(z)\cos(z) \\ \cos(2z) &= \cos(z)^2 - \sin(z)^2. \end{aligned}$$

3.9 Die Kreiszahl π

In diesem Abschnitt studieren wir die Sinus und Cosinusfunktion als Funktionen der Variablen $x \in \mathbb{R}$. Aus der Definition von $\sin(x)$ folgt $\sin(0) = 0$.

Satz 3.44. *Die Sinusfunktion hat auf* $]0, +\infty[$ *mindestens eine Nullstelle. Sei*

$$\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}.$$

Dann gilt:

1. $\sin \pi = 0, \quad \pi \in]2, 4[$.
2. $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$.
3. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Zunächst ein paar Bemerkungen von allgemeinem Interesse.
Sei $x \geq 0$: die Reihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

ist alternierend.
Für $x \geq 0$ ist $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n \geq 0}$ genau dann monoton fallend, falls

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \forall n \geq 1,$$

das heisst

$$x^2 \leq 2n \cdot (2n+1) \qquad \forall n \geq 1,$$

also

$$x \leq \sqrt{6}.$$

Es folgt dann aus dem Satz 2.48:

Korollar 3.45.

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \qquad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}.$$

Beweis von Satz 3.44. Sei wieder:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

Wir betrachten für $x \geq 0$ die alternierende Reihe

$$\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \cdots.$$

Dann ist $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n \geq 4}$ monoton fallend, falls

$$x^2 \leq 8 \cdot 9 = 72,$$

das heisst
$$0 \leq x \leq \sqrt{72}.$$
Nach Satz 2.48 folgt
$$\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \cdots \leq \frac{x^9}{9!} \qquad \forall x \in \left[0, \sqrt{72}\right]$$
woraus
$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad \forall x \in \left[0, \sqrt{72}\right]$$
folgt. Insbesondere ergibt eine (lange) Rechnung:
$$\sin(4) \leq -\frac{268}{405} < 0.$$
Aus 3.45 folgt
$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \qquad \forall x \in [0, 2].$$
Insbesondere:
$$\sin x > 0 \qquad \forall x \in]0, 2].$$
Es gilt: $\sin 2 > 0$ und $\sin 4 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also in $]2, 4[$ mindestens eine Nullstelle für die Sinusfunktion.
Aus der Definition von π und der Stetigkeit der Sinusfunktion folgt
$$\sin(\pi) = 0.$$
Aus obiger Diskussion folgt $\pi \in]2, 4[$.
Jetzt zeigen wir: $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$. Aus der Definition von π folgt, dass sin auf $]0, \pi[$ keine Nullstelle besitzt.
Nun bemerken wir
$$0 < 1 < 2 \leq \pi$$
und
$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} > 0.$$
Falls es $y \in]0, \pi[$ gibt mit $\sin(y) < 0$ dann würde aus $\sin(1) > 0$ und dem Zwischenwertsatz die Existenz von z zwischen 1 und y folgen mit
$$\sin(z) = 0.$$
Insbesondere $0 < z < \pi$, ein Widerspruch zur Definition von π.
Nun zu (3):
Aus der Winkelverdopplungsformel folgt:
$$0 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2}.$$

Da $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$ ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, insbesondere folgt:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Aus $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$ und $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ folgt

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

und somit:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

$\square$

Korollar 3.46. *1.* $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$

2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. *Nullstellen von Sinus* $= \{k \cdot \pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in \ ]2k\pi, \ (2k+1)\pi[\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in \ ](2k+1)\pi, \ (2k+2)\pi[\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

6. *Nullstellen von Cosinus* $= \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \ -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Beweis. (1): Aus $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ (Satz 3.44(3)) folgen

$$e^{i\pi} = i^2 = -1 \quad \text{und} \quad e^{2i\pi} = (-1)^2 = 1.$$

(2): Aus Satz 3.42(3) und Satz 3.44(3):

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-ix}e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix} \cdot i - e^{-ix}(-i)}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x).
\end{aligned}$$

Für $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ verfährt man analog.

(3) und (4) folgen mit mehrfacher Anwendung von (2).

(5): Aus Satz 3.44(2) folgt

$$\sin(x) > 0 \qquad \forall x \in \,]0, \pi[$$

und aus $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ folgt

$$\sin(x) < 0 \qquad \forall x \in \,]\pi, 2\pi[\,.$$

Falls $x \in \,]2k\pi, (2k+1)\pi[$ folgt $x - 2k\pi \in \,]0, \pi[$ und somit

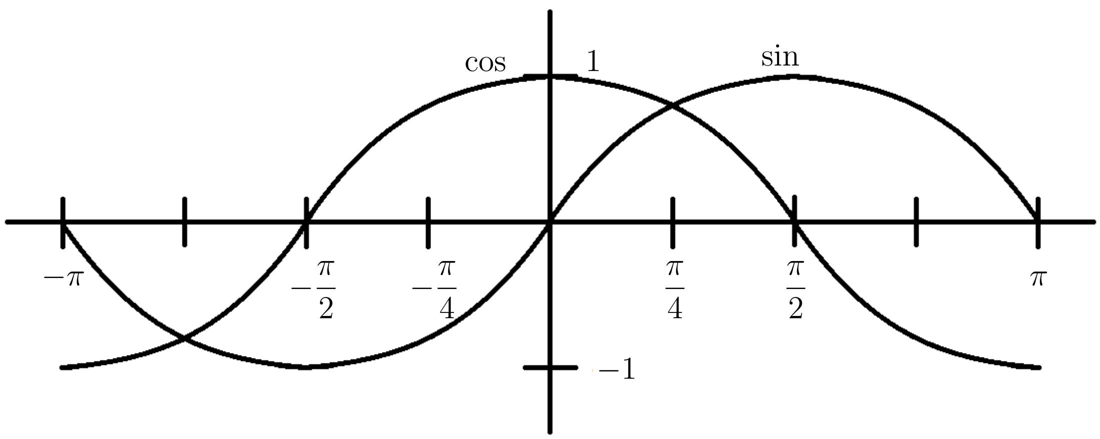
$$\sin(x) = \sin(x - 2k\pi) > 0.$$

Falls $x \in \,](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$ folgt $x - 2k\pi \in \,]\pi, 2\pi[$ und somit

$$\sin(x) = \sin(x - 2k\pi) < 0.$$

(6) Folgt aus (5) mit der Relation $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ aus (2). □

Mittels Differentialrechnung werden wir ein besseres Verständnis für das Bild der Graphen von Sinus und Cosinus entwickeln.



Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ definieren wir die Tangensfunktion:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

und für $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ die Cotangensfunktion:

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

3.10 Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten wieder Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und wollen Grenzwerte für den Fall definieren, wenn $x \in D$ "gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt"; wir müssen dabei berücksichtigen, dass

$$x_0 \notin D$$

möglich ist. Wir werden also annehmen, dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist.

Definition 3.47. $x_0 \in \mathbb{R}$ *ist ein* **Häufungspunkt** *der Menge D falls* $\forall \delta > 0$*:*

$$(\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset.$$

Beispiel 3.48. Sei $D = \{0\} \cup]1,2[$. Dann ist die Menge D' der Häufungspunkte von D:

$$D' = [1,2].$$

Definition 3.49. *Sei* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *ein Häufungspunkt von* D. *Dann ist* $A \in \mathbb{R}$ *der Grenzwert von* $f(x)$ *für* $x \to x_0$, *bezeichnet mit*

$$\text{"} \lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{"},$$

falls $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *so dass*

$$\forall x \in D \cap (\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \setminus \{x_0\}) : \quad |f(x) - A| < \epsilon.$$

Bemerkung 3.50.

1. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

folgt

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A.$$

2. Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3. Mittels (1) zeigt man leicht, dass falls $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existieren, so folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

4. Sei $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

falls beide Grenzwerte existieren.

5. Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x)$$

dann existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x).$$

Beispiel 3.51. Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aus 3.45 folgt $\forall x \in \left]0, \sqrt{6}\right]$:

$$1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

und folglich $\forall x \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right] \setminus \{0\}$ da x^2 und $\dfrac{\sin x}{x}$ gerade sind. Die Aussage folgt dann aus Bemerkung 3.50(5).

Satz 3.52. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \longrightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass*

$$y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$. Dann folgt aus Bemerkung 3.50(1):

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = y_0$$

und aus der Stetigkeit von g:

$$g(y_0) = \lim_{n \to \infty} g(f(a_n))$$

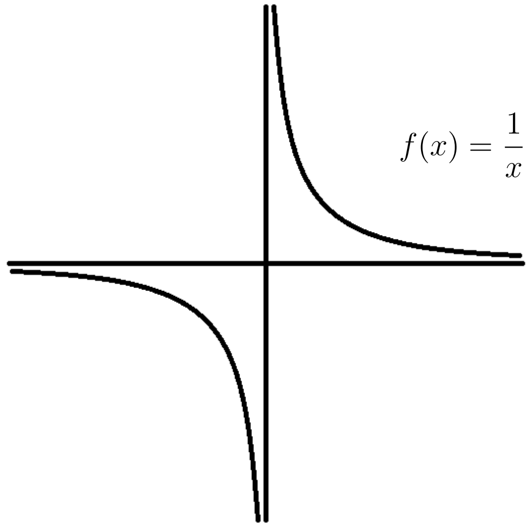
Der Satz folgt dann mit Verwendung von Bemerkung 3.50(1). □

Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte

Betrachten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dann wird für $x > 0$, x beliebig nahe an 0, $\dfrac{1}{x}$ beliebig positiv gross und für $x < 0$, x beliebig nahe an 0, $\dfrac{1}{x}$ beliebig negativ "gross". In beiden Fällen hat $\dfrac{1}{x}$ ein einfaches Verhalten.



Im Fall $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f :]0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

ist f auf $]0, \infty[$ definiert. Falls $a > 0$ werden wir sehen, dass

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,\infty[}} f(x) = 0.$$

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, x_0 ist Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt.
Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion

$$f\big|_{D \cap [x_0, +\infty)}$$

für $x \to x_0$ existiert, wird er mit

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

bezeichnet und nennt sich rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0.
Wir erweitern diese Definition auf:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \quad f(x) > \frac{1}{\epsilon}$$

und analog:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \quad f(x) < -\frac{1}{\epsilon}.$$

Linksseitige Häufungspunkte und Grenzwerte werden analog definiert.
Mit diesen Definitionen gilt:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Beispiel 3.53. $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Nun, $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln x$ ist strikt monoton. Sei $e^{-(n+1)} < x < e^{-n}$, dann folgt $-(n+1) < \ln x < -n$ woraus die Behauptung folgt.

Beispiel 3.54. Für $a > 0$ ist $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$.

Aus 3.53 folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta > 0$ gibt so dass:

$$0 < x < \delta \implies \ln x < -n,$$

und da $a > 0$,

$$a \ln x < -an,$$

und da exp (streng) monoton wachsend,

$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-an) .$$

Nun wird mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross $\exp(-an) = (\exp(-a))^n$ beliebig klein, da $\exp(-a) < 1$ woraus die Behauptung folgt.

4 Differenzierbare Funktionen

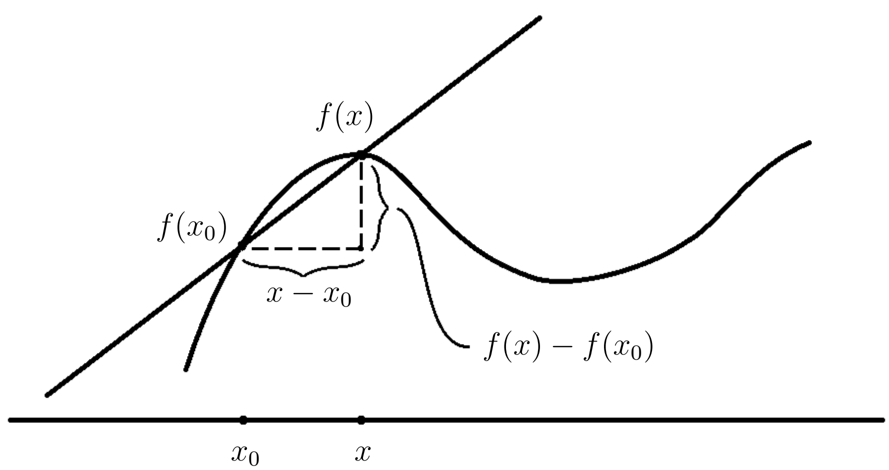
4.1 Die Ableitung: Definition und elementare Folgerungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D.

Definition 4.1. *f ist* **in x_0 differenzierbar**, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Steigung der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$.

Falls $f'(x_0)$ existiert ist die Intuition, dass die Familien der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ für $x \neq x_0$, $x \to x_0$ als "Grenzwert" die Tangente zum Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ annimmt.

Bemerkung 4.2. Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0)$, $x = x_0 + h$ zu setzen, so dass:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Wir behandeln jetzt zwei äquivalente Formulierungen der Differenzierbarkeit.

Satz 4.3 (Weierstrass 1861)**.** *Sei* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ *Häufungspunkt von* D. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. f *ist in* x_0 *differenzierbar.*

2. *Es gibt* $c \in \mathbb{R}$ *und* $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit:*

   2.1 $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

   2.2 $r(x_0) = 0$ *und* r *ist stetig in* x_0.

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. (1) $\implies$ (2): Wir nehmen an f ist differenzierbar in x_0. Sei also

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir definieren: $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \qquad \text{für} \quad x \in D \setminus \{x_0\} \\ r(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dann ist (2.1) mit $c = f'(x_0)$ und r offensichtlich erfüllt. Da

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0 = r(x_0)$$

folgt mit 3.50(2), dass r in x_0 stetig ist.
(2) $\implies$ (1): Übung. □

Die Formulierung der Differenzierbarkeit von f mittels

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

und der Stetigkeit von r in x_0 hat den Vorteil, dass sie keinen Limes enthält. Ausserdem ist dann

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

die Gleichung der Tangente zum Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Wir können die Charakterisierung der Differenzierbarkeit noch Vereinfachen in dem wir in Satz 4.3(2.1)

$$\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$$

setzen. Wir erhalten:

Satz 4.4. *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass*

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)\,(x - x_0) \qquad \forall x \in D.$$

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Korollar 4.5. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0.*

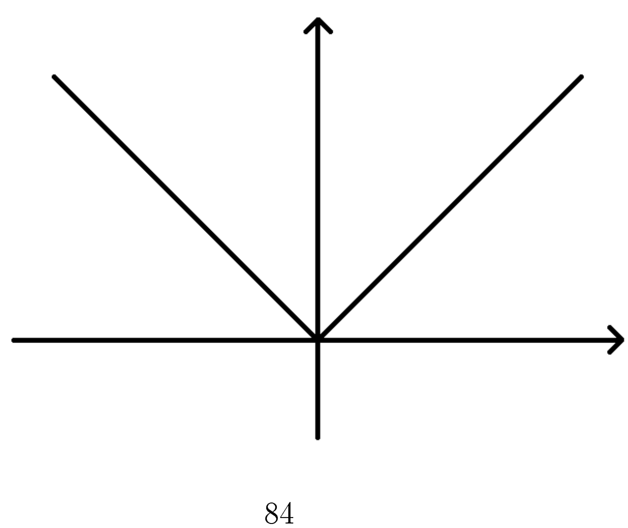
Beispiel 4.6.

1. $f = \mathit{1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dann ist $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = x$. Dann ist $f' = \mathit{1}$.
   Folgt aus $f(x) - f(x_0) = 1 \cdot (x - x_0)$.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x_0) = 2x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.
   Folgt aus:
   $$f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x - x_0)\,(x + x_0)$$
   Also für $x \neq x_0$:
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$$
   woraus
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$
   folgt.

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = |x|$.



Ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:
Für $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$$

Für $x > 0$:

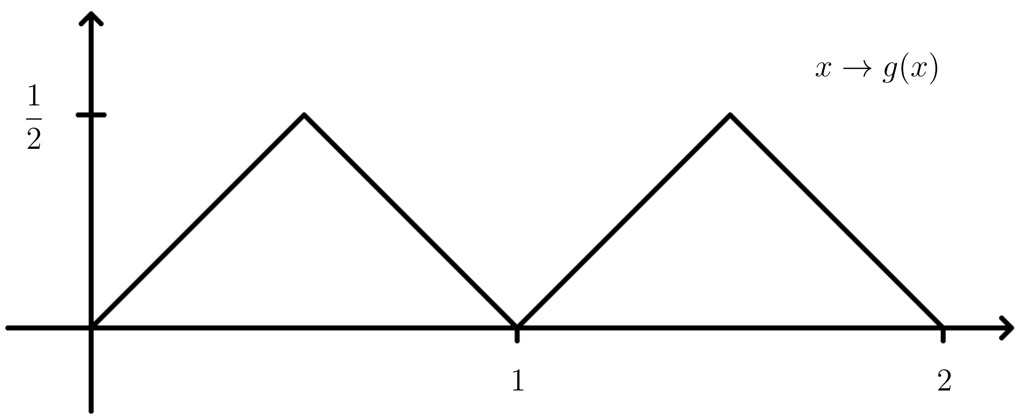
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1.$$

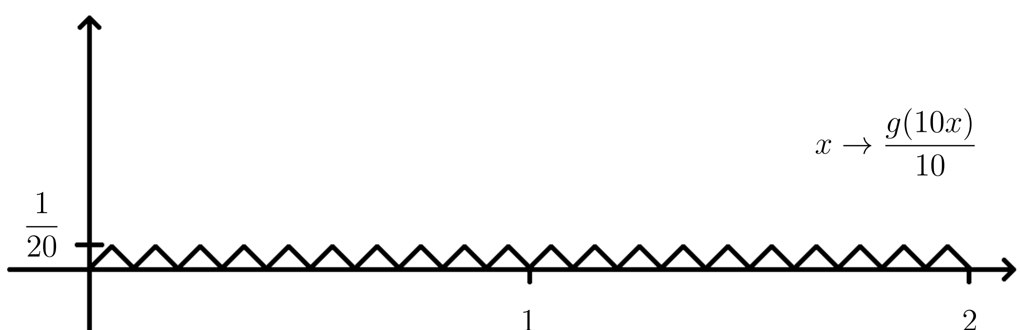
Also hat für $x \to 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ keinen Grenzwert.

Für alle $x_0 \neq 0$ ist f in x_0 differenzierbar.

5. (Van der Waerden 1930).
Sei für $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \min \{|x - m| : m \in \mathbb{Z}\}.$$





Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$$

Dann ist nach Satz 3.38 diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent und f ist deswegen stetig.
Mittels Dezimalentwicklung kann man zeigen, dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Definition 4.7. *$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist* **in D differenzierbar***, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.*

Meistens ist D eine endliche Vereinigung von Intervallen I_n mit Endpunkten $a_n < b_n$; insbesondere ist dann jeder Punkt von D Häufungspunkt von D.

Beispiel 4.8. 1. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp' = \exp$.

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$:

$$\frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\left[\frac{\exp(h)-1}{h}\right]$$

Also :

$$\exp'(x_0) = \exp(x_0) \lim_{h\to 0}\left[\frac{\exp(h)-1}{h}\right].$$

Aus $\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots$ folgt für $h \neq 0$:

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots$$

Und für $h \in [-1,1]$, $h \neq 0$:

$$\left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| \leq |h|\left[\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \cdots\right] \leq 2|h|$$

woraus

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right) - 1 = 0$$

folgt.

2. $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Aus dem Additionsgesetz für Sinus folgt:

$$\begin{aligned}\sin(x_0+h) - \sin(x_0) &= \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)\\ &= \sin(x_0)\,(\cos(h)-1) + \cos(x_0)\sin(h)\end{aligned}$$

Also $\forall h \neq 0$:

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}$$

In Beispiel 3.51 hatten wir gezeigt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Aus der Definition von cos:

$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

sieht man, analog wie im Fall von exp, dass:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0.$$

Es folgt:

$$\sin'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$$

Ein analoges Argument ergibt:

$$\cos' = -\sin .$$

Um die Ableitung von Polynomen, Logarithmus und inversen Funktionen zu bestimmen, stellen wir nun allgemeine "Rechenregeln" für Ableitungen von Summen, Produkten, Quotienten und Verknüpfungen von Funktionen zusammen.

Satz 4.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:*

1. *$f+g$ ist in x_0 differenzierbar und*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. *$f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. *Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\dfrac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Seien (Satz 4.4) $\phi, \psi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0) \qquad (*)$$
$$g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x-x_0). \qquad (**)$$

Dann folgt

$$(f+g)(x) = (f+g)(x_0) + (\phi(x)+\psi(x))(x-x_0).$$

Da $\phi+\psi$ in x_0 stetig ist folgt, dass $f+g$ in x_0 differenzierbar ist und

$$(f+g)'(x_0) = \phi(x_0) + \psi(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad \text{(Satz 4.4)}.$$

Dies beweist (1).
Zu (2): Das Produkt der Identitäten $(*)$ und $(**)$ ergibt:

$$(f\cdot g)(x) = (f\cdot g)(x_0) + \Big(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x-x_0)\Big)(x-x_0)$$

Sei
$$\xi(x) := f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x-x_0).$$
Dann ist ξ stetig in x_0, folglich gilt:
$$(f\cdot g)'(x_0) = \xi(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$
Dies beweist (2).
Zu (3): Da g in x_0 stetig ist (Korollar 4.5) gibt es $\delta > 0$ so dass
$$g(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \cap D.$$
Für diese x betrachten wir:
$$\begin{aligned}\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0) &= \frac{f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)}{g(x_0)+\psi(x)(x-x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\ &= \frac{\big(\phi(x)g(x_0) - \psi(x)f(x_0)\big)(x-x_0)}{\big(g(x_0)+\psi(x)(x-x_0)\big)g(x_0)}\end{aligned}$$
Sei $\forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \cap D$:
$$\eta(x) := \frac{\phi(x)g(x_0) - \psi(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$
Dann ist $\eta : \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 und folglich:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \eta(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}.$$
□

Beispiel 4.10. 1. $n \geq 1: \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Die Tangensfunktion
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$
ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

3. Die Cotangensfunktion
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \notin \pi\mathbb{Z}$$
ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und
$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Beweis. (1): (Induktion) Für $n = 1$ ist es Beispiel 4.6(2).
Sei $n \geq 2$; wir nehmen an
$$\left(x^{n-1}\right)' = (n-1)\, x^{n-2}.$$
Dann folgt auf $x^n = x \cdot x^{n-1}$ mit 4.9(2):

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \left(x \cdot x^{n-1}\right)' = x' x^{n-1} + x\left(x^{n-1}\right)' = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} \\ &= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

(2): Aus 4.9(3):

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},\end{aligned}$$

wobei im zweitletzten Schritt 4.8(2) verwendet wurde.
(3): Analoges Argument wie in (2). □

Das nächste Resultat zeigt wie man die Ableitung einer Vernknüpfung von Funktionen berechnet.

Satz 4.11. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \longrightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 4.4 seien $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 respektive in $y_0 = f(x_0)$ stetig, so dass

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \phi(x)(x - x_0), \qquad x \in D \\ g(y) &= g(y_0) + \psi(y)(y - y_0), \qquad y \in E.\end{aligned}$$

Mit $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ erhalten wir

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \psi(f(x)))(f(x) - f(x_0)) = g(f(x_0)) + \psi(f(x))\,\phi(x)(x - x_0).$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, ist sie nach Korollar 4.5 stetig, somit ist $\psi \circ f$ in x_0 stetig (Satz 3.20) und nach Korollar 3.8(1) ist $x \longmapsto \psi(f(x))\,\phi(x)$ stetig in x_0. Somit ist nach Satz 4.4 $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = \psi(f(x_0))\,\phi(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

□

Korollar 4.12. *Sei $f : D \longrightarrow E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ Häufungspunkt; wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$; zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit

$$a_n \neq x_0 \quad \forall n \geq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x_0.$$

Dann folgt aus der Stetigkeit von f in x_0 (Korollar 4.5), dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = y_0$$

und da f injektiv ist, folgt

$$f(a_n) \neq y_0 \qquad \forall n \geq 1,$$

woraus folgt, dass y_0 ein Häufungspunkt von E ist.
Sei nun (Satz 4.4) $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig mit

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0), \quad \phi(x_0) = f'(x_0).$$

Wir ersetzen $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, insbesondere $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ und erhalten:

$$y - y_0 = \phi\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right).$$

Da $\phi \circ f^{-1}$ in y_0 stetig ist und $\phi\left(f^{-1}(y_0)\right) = \phi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass:

$$\forall y \in \,]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\, \cap E : \quad \phi \circ f^{-1}(y) \neq 0.$$

Also folgt für dieselben y's:

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\phi\left(f^{-1}(y)\right)}(y - y_0).$$

Nach Korollar 3.8(2) ist $\dfrac{1}{\phi\left(f^{-1}(y)\right)}$, definiert auf $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\, \cap E$, stetig in y_0. Nach Satz 4.4 ist also f^{-1} differenzierabr in y_0 und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{\phi\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\phi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel 4.13. 1. Die Ableitung von $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

Wir wenden Satz 4.11 auf $f(x) = \exp x$ und $g(y) = \ln y$ an und erhalten durch Ableiten:

$$\ln'(\exp x)\exp'(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da nach 4.8(1) $\exp'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\ln'(\exp x)\exp x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und da $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$ bijektiv ist, folgt:

$$\forall y \in]0,\infty[: \quad \ln'(y) \cdot y = 1.$$

2. Sei $a \in \mathbb{R}$; die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned}]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

ist ax^{a-1}.
Per Definition: $x^a = \exp(a \ln x)$, $x > 0$. Wir wenden Satz 4.11 an auf $f(x) = a \ln x$, $g(y) = \exp y$ und erhalten mit $g'(y) = \exp y$ und $f'(x) = a \cdot \dfrac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} (x^a)' &= \exp'(a \ln x)\,\frac{a}{x} = \exp(a \ln x)\,\frac{a}{x} \\ &= x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \end{aligned}$$

3. (Vergleiche mit Korollar 4.12)
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ ist bijektiv in $\mathbb{R}$ differenzierbar. Aber f^{-1} ist in 0 nicht differenzierbar.

4.2 Zentrale Sätze über die (erste) Ableitung

Informationen über die erste Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion, wie zum Beispiel Vorzeichen und Nullstellen, erlauben über das qualitative Verhalten der Funktion f recht präzise Schlüsse zu ziehen. Begriffe wie monoton steigend und fallend haben wir in 3.1 eingeführt. Dazu kommen noch:

Definition 4.14. *Sei* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D$.

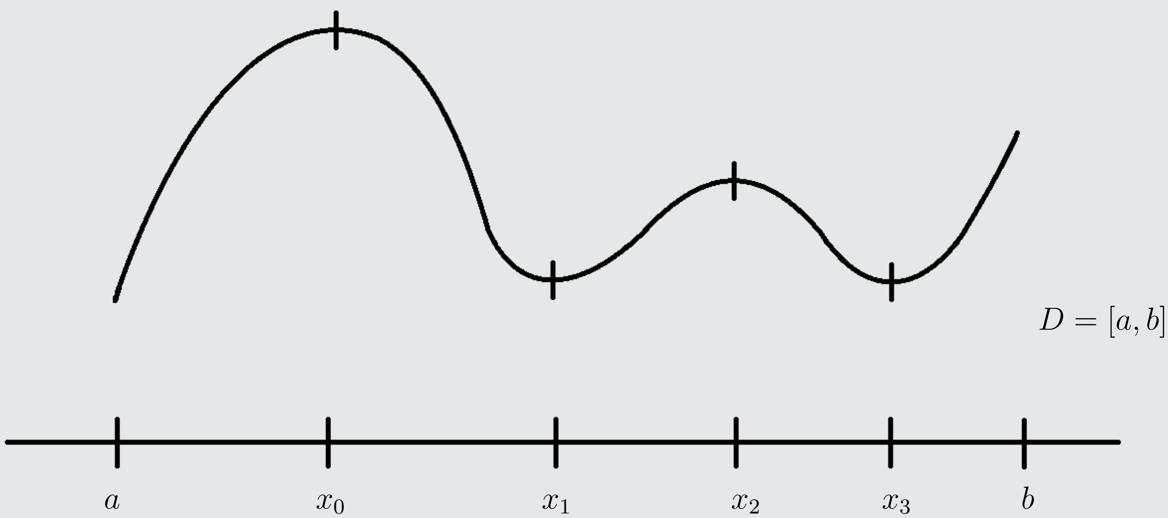
1. *f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap D$$

2. *f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap D$$

3. *f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.*



x_0, x_2 sind lokale Maximalstellen und x_1, x_3 sind lokale Minimalstellen.

Satz 4.15. *Sei* $f : \,]a, b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \,]a, b[$. *Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar.*

1. *Falls $f'(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) > f(x_0) \qquad & \forall x \in \,]x_0, x_0 + \delta[\\ f(x) < f(x_0) \qquad & \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0[\, . \end{aligned}$$

2. *Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) < f(x_0) \qquad & \forall x \in \,]x_0, x_0 + \delta[\\ f(x) > f(x_0) \qquad & \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0[\, . \end{aligned}$$

3. *Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, folgt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Zu (1): Sei $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ wobei $\phi : \,]a, b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist und $\phi(x_0) = f'(x_0) > 0$. Da ϕ in x_0 stetig ist und $\phi(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$\phi(x) > 0 \quad \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Dann folgt für $x \in \,]x_0, x_0 + \delta[$:

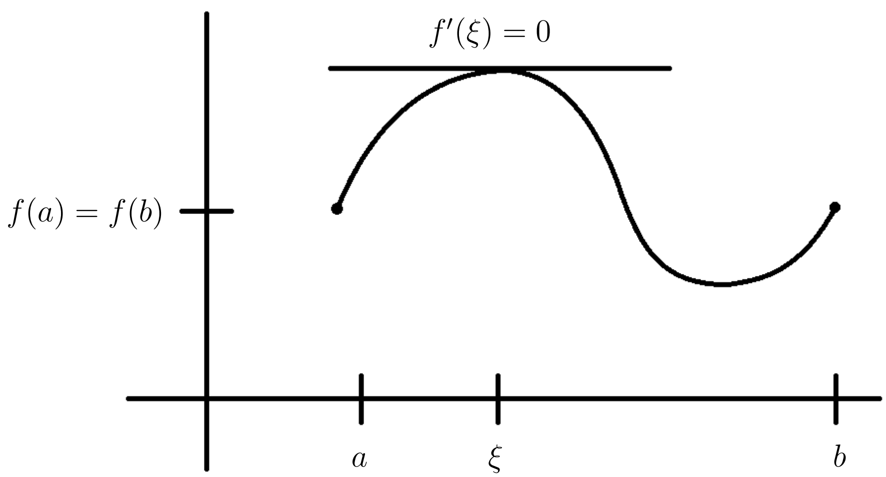
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{>0} > f(x_0)$$

und für $x \in \,]x_0 - \delta, x_0[$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{<0} < f(x_0).$$

Zu (2): Beweis analog; alternativ kann man (1) auf $-f$ anwenden.
Zu (3): Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann kann wegen (1) und (2) weder $f'(x_0) > 0$ noch $f'(x_0) < 0$ gelten, also folgt $f'(x_0) = 0$. □

Der nächste Satz lässt sich bildlich wie folgt darstellen:



Satz 4.16 (Rolle 1690). *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\xi \in \,]a, b[$ mit*

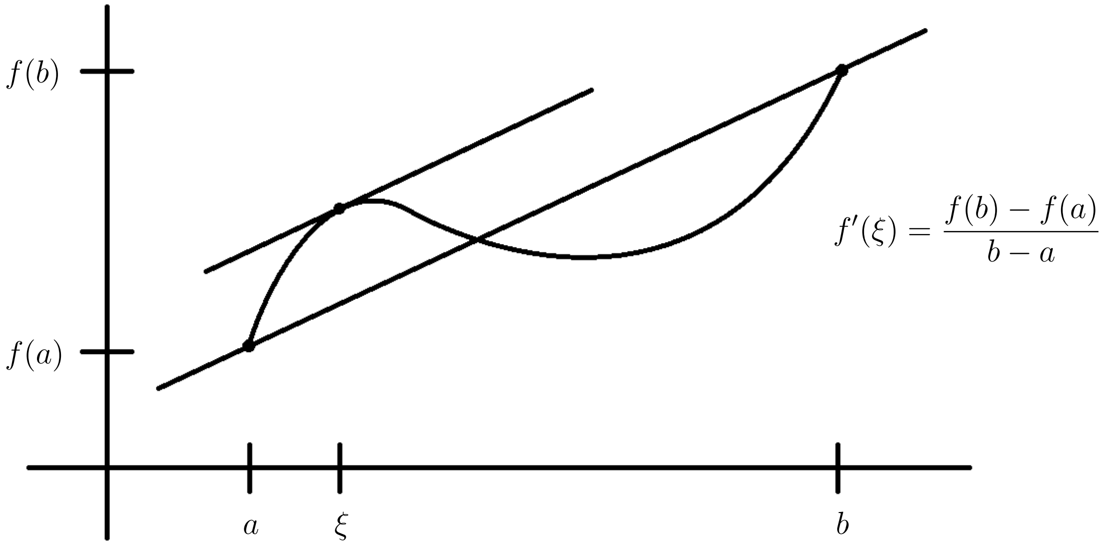
$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis. Aus dem Min-Max Theorem folgt, dass es u, v in $[a, b]$ gibt mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Falls eines der beiden u, v in $]a, b[$ liegt, nennen wir es ξ. Dann hat f in ξ ein lokales Extremum und dann folgt aus Satz 4.15(3), dass $f'(\xi) = 0$ und der Satz ist bewiesen.
Falls aber $\{u, v\} \subseteq \{a, b\}$ folgt $f(u) = f(v)$ und somit ist f konstant, insbesondere folgt $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \,]a, b[$. □

Der folgende Satz ist eine naheliegende Verallgemeinerung des Satzes von Rolle und kann geometrisch wie folgt dargestellt werden:



Satz 4.17 (Lagrange 1797)**.** *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit* f *in* $]a,b[$ *differenzierbar. Dann gibt es* $\xi \in\ ]a,b[$ *mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Beweis. Sei

$$g(x) = (x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)$$

die Gleichung der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Dann ist klar, dass

$$h(x) := f(x) - g(x)$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllen $(h(a) = h(b) = 0)$. Es gibt also $\xi \in\ ]a,b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi).$$

Da $\forall x \in\ ]a,b[: \quad g'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ folgt der Satz. □

Das folgende Korollar beschreibt, wie angekündigt, das qualitative Verhalten von f mittels des Vorzeichens von f'.

Korollar 4.18. *Seien* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ *differenzierbar.*

1. *Falls* $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *ist* f *konstant.*
2. *Falls* $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *gibt es* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$.
3. *Falls* $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *ist* f *auf* $[a,b]$ *monoton wachsend.*
4. *Falls* $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *ist* f *auf* $[a,b]$ *strikt monoton wachsend.*
5. *Falls* $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *ist* f *auf* $[a,b]$ *monoton fallend.*
6. *Falls* $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in\ ]a,b[$ *ist* f *auf* $[a,b]$ *strikt monoton fallend.*

7. *Falls es* $M \geq 0$ *gibt mit*
$$|f'(\xi)| \leq M \qquad \forall \xi \in \,]a,b[$$
dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ *:*
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Beweis. (1): Wende den Satz von Lagrange auf das Intervall $[a,x]$ an, wobei $a < x \leq b$. Dann gibt es $\xi \in \,]a,x[$ mit:
$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0$$
woraus $f(x) = f(a)$ für alle $x \in \,]a,b]$ folgt.
(2): Folgt aus (1) angewendet auf $f - g$.
(3) und (4): Seien $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Der Satz von Lagrange angewandt auf $[x_1, x_2]$ liefert ein $\xi \in \,]x_1, x_2[$ mit:
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$
wobei im Fall $f'(\xi) \geq 0, \quad f(x_2) \geq f(x_1)$ folgt und im Fall $f'(\xi) > 0, \quad f(x_2) > f(x_1)$.
(5) und (6) folgen aus (3) und (4) angewandt auf $-f$.
(7): Seien $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und $\xi \in \,]x_1, x_2[$ mit
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$
Dann folgt $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$. □

Beispiel 4.19 (trigonometrische Funktionen)**.**

1. arcsin: Da $\sin' = \cos$ (4.8(2)) und $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (3.46(6)) folgt aus Korollar 4.18(4), dass die Sinusfunktion auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ strikt monoton wachsend ist, also ist
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$
bijektiv. Wir definieren
$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
als die Umkehrfunktion von sin. Nach Korollar 4.12 ist sie auf $]-1,1[$ differenzierbar und für $y = \sin x, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ folgt nach 4.12:
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$
Nun benützen wir:
$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
woraus mit $\cos x > 0$ folgt:
$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$
Wir erhalten also $\forall y \in \,]-1,1[$
$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

2. <u>arccos:</u> Eine analoge Diskussion wie in (1) zeigt, dass $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ strikt monoton fallend ist, und $[0,\pi]$ auf $[-1,1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $]-1,1[$ differenzierbar und:

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \forall y \in \,]-1,1[\,.$$

3. <u>arctan:</u> Für $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und in 4.10(2) deren Ableitung berechnet:

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Also ist tan auf $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend mit

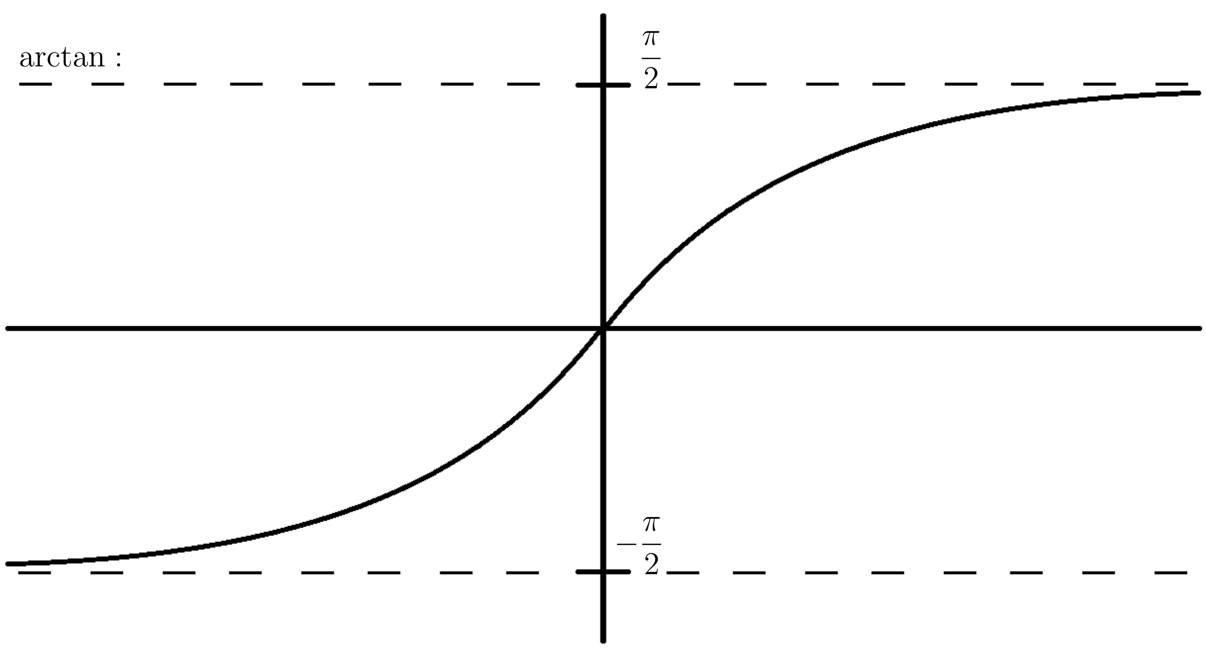
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

Also ist $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \,]-\infty,\infty[$ bijektiv. Sei

$$\arctan : \,]-\infty,\infty[\, \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

die Umkehrfunktion. Dann ist arctan differenzierbar und für $y = \tan x$:

$$\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$



4. arccot: Für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Cotangensfunktion definiert:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

und in 4.10(3) deren Ableitung berechnet:

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Die Cotangensfunktion ist auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend und bildet $]0, \pi[$ bijektiv auf $]-\infty, \infty[$ ab. Sei:

$$\operatorname{arccot} :]-\infty, \infty[\longrightarrow]0, \pi[$$

die Umkehrfunktion. Dann folgt:

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in]-\infty, \infty[\,.$$

Beispiel 4.20 (Hyperbel und Areafunktionen)**.**
Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Funktionen $\cosh x, \sinh x, \tanh x$ definiert $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.\end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}\cosh'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x\\ \sinh'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\cosh x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh x \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[\,, \quad \sinh(0) = 0$. Daraus folgt: cosh ist auf $[0, \infty[$ strikt monoton wachsend, $\cosh(0) = 1$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$. Also ist

$$\cosh : [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$$

bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$

bezeichnet. Unter Benützung von

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt:

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \qquad \forall y \in \left]1, +\infty\right[.$$

Analog zeigt man, dass:

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Für $\tanh(x)$ folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0.$$

Also ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und man zeigt, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1,$$
$$\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1.$$

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-1, 1\right[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{artanh} : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet. Es gilt dann:

$$\operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{1 - y^2} \qquad \forall y \in \left]\text{-}1, 1\right[.$$

Anwendung 4.21. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \left[0, 2\pi\right[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion von $\left[0, 2\pi\right[$ nach

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Wir überlassen dies als Übung mit folgendem Hinweis: unter Benützung der Identitäten in 3.46 (2), (3), (4) genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \{(x, y) \in K :\ 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y < 1\} \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

bijektiv ist.

Ein effizientes Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten ist die Regel von l'Hospital. Sie stützt sich auf eine einfache Verallgemeinerung des Satzen von Lagrange, die wir nun behandeln.

Satz 4.22 (Cauchy)**.** *Seien* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und in* $]a, b[$ *differenzierbar. Dann gibt es* $\xi \in]a, b[$ *mit*

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ *folgt*

$$g(a) \neq g(b)$$

und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beachte: Man erhält den Satz von Lagrange mit $g(x) = x$.

Beweis. Wende den Satz von Rolle auf

$$F(x) := f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))$$

an:

$$F(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

und

$$F(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(b)g(a) + g(b)f(a) = F(a).$$

Nach Rolle gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $F'(\xi) = 0$. Dies beweist die erste Aussage.
Die zweite Aussage folgt aus dem Satz von Rolle, denn falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ kann nach Rolle $g(b) = g(a)$ nicht gelten. $\square$

Satz 4.23 (l'Hospital 1696[a] , Johann Bernoulli 1691/92)**.**
Seien $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.
Falls

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[a] Guillaume-François-Antoine de l'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Entremont, Seigneur d'Oucques

Beweis. Für die Begriffe von rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerten verweisen wir auf Abschnitt 3.10.
Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda \right| < \epsilon \qquad \forall x \in \left]b - \delta, b\right[.$$

Seien $b - \delta < u < v < b$, und für diese u und v sei $\xi \in \left]u, v\right[$ wie im Satz von Cauchy:

$$\frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dann folgt:

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \epsilon.$$

Da diese Ungleichung insbesondere für alle $v \in \left]u, b\right[$ gilt, folgt aus

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

dass

$$\left| \frac{f(u)}{g(u)} - \lambda \right| < \epsilon$$

und somit

$$\lim_{u \to b^-} \frac{f(u)}{g(u)} = \lambda.$$

□

Bemerkung 4.24. Der Satz gilt auch

- falls $b = +\infty$
- falls $\lambda = +\infty$
- falls $x \to a^+$.

Beispiel 4.25. 1. Für $a > 0$ folgt aus 4.13 (1), (2) und l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{a x^{a-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

2.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir Ableitungen höherer Ordnung im Allgemeinen einführen. Wir wollen diesen Abschnitt mit einer Diskussion über Konvexität und deren Zusammenhang mit zweiter Ableitung beenden.
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

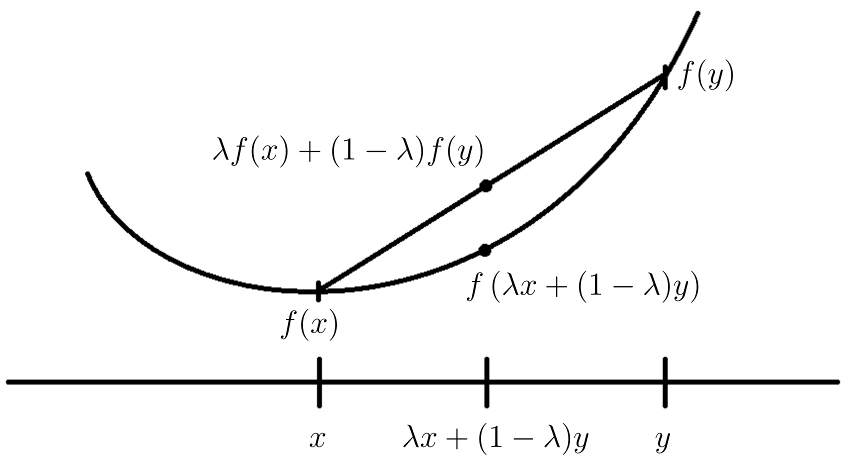
Definition 4.26. *1. f ist* **konvex** *(auf I) falls für alle $x \leq y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

gilt.

2. f ist **streng konvex** *falls für alle $x < y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in \,]0,1[\,$,*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$



Bemerkung 4.27. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n \geq 1$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $[0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Lemma 4.28. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (*)$$

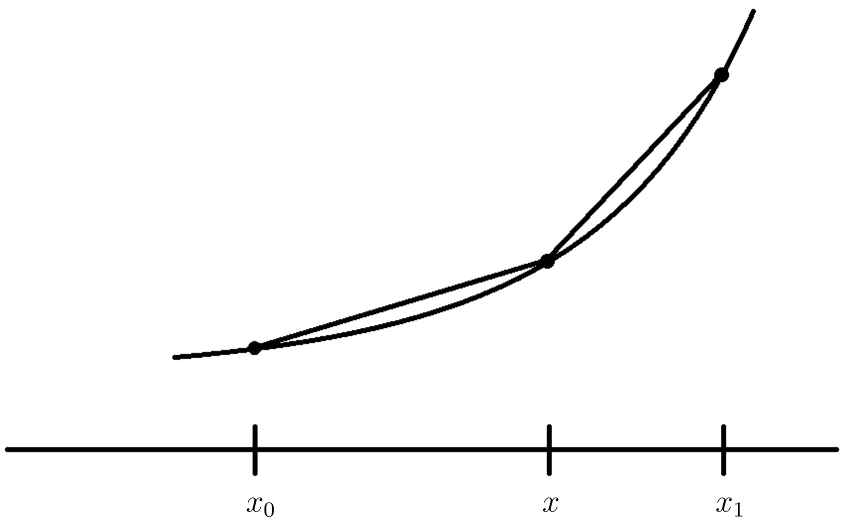
gilt.
Sie ist genau dann streng konvex, falls in $(*)$ strikte Ungleichheit gilt.

Beweis. Sei $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$, also $\lambda = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$.
Dann ist

$$f(x) \leq \underbrace{\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)}_{(1-\lambda)} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)}_{\lambda} f(x_1)$$

äquivalent zu:

$$(x_1 - x_0) f(x) \leq (x_1 - x) f(x_0) + (x - x_0) f(x_1)$$



Mittels der Bemerkung $x_1 - x_0 = (x_1 - x) + (x - x_0)$ ist dies wiederum äquivalent zu:

$$(x_1 - x)\,(f(x) - f(x_0)) \leq (x - x_0)\,(f(x_1) - f(x))$$

also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Die Aussage betreffend strenge Konvexität folgt aus dem selben Argument. □

Aus dem Satz von Lagrange erhalten wir relativ leicht:

Satz 4.29. *Sei $f : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.*

Beweis. Wir beschränken uns darauf, eine Implikation zu beweisen. Wir nehmen an, dass f' monoton wächst. Seien $x_0 < x < x_1$; dann gibt es nach dem Satz von Lagrange $\xi \in \,]x_0, x[$ und $\eta \in \,]x, x_1[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\eta).$$

Da nun $\xi < \eta$ folgt $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ und somit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Die Konvexität folgt dann aus Lemma 4.28. Strenge Konvexität folgt mit dem selben Argument aus der strengen Monotonie von f'. □

Sei $f : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$. Falls f in $]a,b[$ differenzierbar ist und ihre Ableitung f' wiederum in $]a,b[$ differenzierbar ist, bezeichnet f'' (oder $f^{(2)}$) die Funktion $(f')'$. Die Funktion f'' nennt sich die zweite Ableitung von f und f ist zweimal differenzierbar in $]a,b[$.

Korollar 4.30. *Sei* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar in* $]a,b[$.
Die Funktion f *ist (streng) konvex, falls* $f'' \geq 0$ *(bzw.* $f'' > 0$*)* *auf* $]a,b[$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 4.29 und Korollar 4.18. □

Beispiel 4.31. Für alle $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n$ in $]0, \infty[$ gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Wir betrachten $f(x) = -\ln x$, dann ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

und

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in]0, \infty[.$$

Folglich ist f konvex und aus Bemerkung 4.27 mit $I =]0, \infty[$ und $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ folgt:

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n}\ln x_i = -\frac{1}{n}\ln(x_1 \cdots x_n)$$

Die Ungleichung 4.31 folgt dann aus der Tatsache, dass die Exponentialfunktion monoton wächst.

4.3 Höhere Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ so dass jedes $x_0 \in D$ Häufungspunkt der Menge D ist. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in D und f' ihre Ableitung; wir setzen $f^{(1)} = f'$.

Definition 4.32.

1. *Für* $n \geq 2$ *ist* f ***n*-mal differenzierbar in *D*** *falls* $f^{(n-1)}$ *in* D *differenzierbar ist. Dann ist* $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ *und nennt sich die* n*-te Ableitung von* f.

2. *Die Funktion* f *ist* ***n*-mal stetig differenzierbar in *D***, *falls sie* n*-mal differenzierbar ist und falls* $f^{(n)}$ *in* D *stetig ist.*

3. *Die Funktion* f *ist in* D **glatt**, *falls sie* $\forall n \geq 1$, n*-mal differenzierbar ist.*

Bemerkung 4.33. Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n \geq 1$, eine n-mal differenzierbare Funktion $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist.

Analog zu Satz 4.9 haben wir:

Satz 4.34. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D.*

1. *$f + g$ ist n-mal differenzierbar und*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

2. *$f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar und*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Beweis. (1): Einfache Induktion unter Benützung von 4.9(1).
(2): Durch Induktion: Für $n = 1$ gilt es nach 4.9(2). Sei $n \geq 2$, wir nehmen an, die Formel gilt für $n - 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n)} = \left((f \cdot g)^{(n-1)}\right)' &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f^{(j)} \cdot g^{(n-1-j)}\right)' \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left[f^{(j+1)} g^{(n-1-j)} + f^{(j)} g^{(n-j)}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \\
&= f^{(n)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right\} f^{(k)} g^{(n-k)} + f \cdot g^{(n)}.
\end{aligned}$$

Für $1 \leq k \leq n-1$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

und die Formel ist bewiesen. □

Beispiel 4.35.

1. Die Funktionen exp, sin, cos, sinh, cosh, tanh sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$.
2. Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt.

3. $\ln : \left]0,+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist glatt;

$$\begin{aligned}&(\ln)'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad (\ln)''(x) = (-1)\,x^{-2}, \quad \dots\\&\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Satz 4.36. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D.*
Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, ist $\dfrac{f}{g}$ in D n-mal differenzierbar.

Beweis. Einfache Induktion über n. Der Fall $n = 1$ folgt aus Satz 4.9(3). □

Analog erhalten wir auch für die Verknüpfung:

Satz 4.37. *Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \longrightarrow E$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ n-mal differenzierbar, und*

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x) \left(g^{(k)} \circ f\right)(x)$$

wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$ ist.

Wir lassen den Beweis als Übung: Es ist ein einfacher Induktionsbeweis. Es gibt auch explizite Formeln für $A_{n,k}$, diese sind aber schwieriger zu beweisen. Hier als Beispiel die drei ersten Ableitungen von $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)' &= (g' \circ f)\, f'\\(g \circ f)^{(2)} &= \left(g^{(2)} \circ f\right)(f')^2 + (g' \circ f)\, f^{(2)}\\(g \circ f)^{(3)} &= \left(g^{(3)} \circ f\right)(f')^3 + 3\left(g^{(2)} \circ f\right) f' f^{(2)} + (g' \circ f)\, f^{(3)}.\end{aligned}$$

Beispiel 4.38. 1. tan ist auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ glatt, sowie cot auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\left]0, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^a$$

glatt.

3. Die inversen trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}&\arcsin : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\&\arccos : \left]-1, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

sind alle glatt.

Zum Beispiel im Fall von arcsin wissen wir, dass die Funktion auf $]-1,1[$ differenzierbar ist mit Ableitung:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(4.19(1)\big)$$

Bemerke nun, dass

$$]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

die Verknüpfung folgender glatter Funktionen ist:

$$\begin{aligned}]-1,1[&\longrightarrow]0,1[\,, &]0,1[&\longrightarrow]0,1[\,, &]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1-x^2, & x &\longmapsto \sqrt{x}, & x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und somit ist $\arcsin'$ glatt.

4.4 Potenzreihen und Taylor Approximation

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass, grob gesagt, konvergente Potenzreihen glatte Funktionen ergeben. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht und wird durch eine schwächere Aussage (Taylor Approximation) ersetzt.

Satz 4.39. *Seien $f_n :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in $]a,b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ wie $(f_n')_{n\geq 1}$ gleichmässig in $]a,b[$ konvergieren (siehe Def. 3.34) mit $\lim_{n\to\infty} f_n =: f$ und $\lim_{n\to\infty} f_n' =: p$.*
Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Beweis. Nach Satz 3.33 sind f und p stetig. Es bleibt also nur $f' = p$ zu beweisen.
Sei $x_0 \in]a,b[$. Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq]a,b[$ und

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\,. \tag{$*$}$$

Sei $N \geq 1$ so dass:

$$|f_n'(\xi) - p(\xi)| \leq \epsilon \qquad \forall n \geq N, \quad \forall \xi \in]a,b[\tag{$**$}$$

Sei nun $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $x \neq x_0$. Nach Lagrange gibt es $\xi_n \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ mit

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(\xi_n).$$

Für $n \geq N$ folgt aus $(**)$:

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - p(\xi_n) \right| < \epsilon$$

und aus $(*)$, dass

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - p(x_0) \right| < 2\epsilon.$$

In dieser letzten Ungleichung können wir zum $\lim\limits_{n\to\infty}$ übergehen und erhalten

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-p(x_0)\right|\leq 2\epsilon \qquad \forall x\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\,.$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=p(x_0).$$

□

Mittels Satz 4.39 erhalten wir folgende fundamentale Eigenschaft von Funktionen, die sich als Potenzreihen darstellen lassen:

Satz 4.40. *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* $\rho>0$ *(siehe 3.39, 3.40). Dann ist*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(x-x_0)^k$$

auf $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ *differenzierbar und*

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k\,(x-x_0)^{k-1}$$

für alle $x\in\,]x_0-\rho,x_0+\rho[\,.$

Durch wiederholte Anwendung von Satz 4.40 erhalten wir:

Korollar 4.41. *Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist* f *auf* $]x_0-\rho,x_0+\rho[$ *glatt und*

$$f^{(j)}(x)=\sum_{k=j}^{\infty}c_k\frac{k!}{(k-j)!}\,(x-x_0)^{k-j}\,.$$

Insbesondere ist

$$c_j=\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Beweis vom Satz. Wir können $x_0=0$ annehmen. Sei

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k$$

und $0<r<\rho$. Nach Satz 3.40 konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[-r,r]$ gleichmässig gegen f. Nun ist

$$f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}kc_kx^{k-1}.$$

Da nach Beispiel 2.14

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1 \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

gilt, folgt dass die Reihe

$$p(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

selben Konvergenzradius ρ hat.
Nach Satz 3.40 konvergiert $(f_n')_{n\geq 1}$ auf $[-r, r]$ gleichmässig gegen p. Aus Satz 4.39 angewandt auf $]-r, r[$ folgt, dass f stetig differenzierbar ist und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad \forall x \in \left]-\rho, \rho\right[.$$

□

Aus Korollar 4.41 folgt, dass falls eine glatte Funktion f in einem Intervall $]-\rho, \rho[$ Summe einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit Konvergenzradius ρ ist, so folgt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dass nicht jede glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist, folgt aus dem folgenden Beispiel:

Beispiel 4.42 (Cauchy 1823)**.**

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ glatt und $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$.
Da andererseits $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, gibt es keine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ρ, die in $]-\rho, \rho[$ gegen f konvergiert.
Aus Satz 4.37 folgt, dass $\forall k \geq 0$

$$f^{(k)}(x) = \mathcal{P}_k\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \qquad \forall x \neq 0$$

wobei $\mathcal{P}_k$ ein Polynom ist.
Unter Benützung von:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^m} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0 \qquad \forall m \geq 0$$

folgt rekursiv mit der Annahme $f^{(k)}(0) = 0$:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = 0.$$

Glatte Funktionen lassen sich aber durch Polynome wie folgt approximieren.

Satz 4.43. *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ $(n+1)$*-mal differenzierbar. Für jedes* $a < x \leq b$ *gibt es* $\xi \in \,]a,x[$ *mit:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Beweis. Der Beweis folgt einer Idee von Cauchy. Seien

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

und

$$S_n(x) := \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dann gilt: $R_n(a) = 0$, $R_n'(a) = 0$, $\ldots$, $R_n^{(n)}(a) = 0$ und $S_n(a) = 0$, $S_n'(a) = 0$, $\ldots$, $S_n^{(n)}(a) = 0$.
Satz 4.22 angewendet auf $f = R_n$ und $g = S_n$ ergibt

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{S_n(x) - S_n(a)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{S_n'(\xi_1)}$$

für ein $\xi_1 \in \,]a,x[$.
Wir können jetzt weiterfahren und Satz 4.22 auf $f = R_n'$ und $g = S_n'$ anwenden und erhalten

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{S_n'(\xi_1)} = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(a)}{S_n'(\xi_1) - S_n'(a)} = \frac{R_n^{(2)}(\xi_2)}{S_n^{(2)}(\xi_2)}$$

für ein $\xi_2 \in \,]a,\xi_1[$.
Wir können diesen Prozess iterieren und erhalten

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{S_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

für ein $\xi_{n+1} \in \,]a,x[$.

Nun ist $S_n^{(n+1)}(x) = 1$ und $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ woraus mit $\xi := \xi_{n+1}$ folgt:

$$R_n(x) = S_n(x) f^{(n+1)}(\xi),$$

und der Satz ist bewiesen. □

Korollar 4.44 (Taylor Approximation)**.**
Sei $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und in* $]c,d[$ $(n+1)$*-mal differenzierbar. Sei* $c < a < d$. *Für alle* $x \in [c,d]$ *gibt es* ξ *zwischen* x *und* a *so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Anhand dieses Korollars können wir eine präzisere Aussage über lokale Extremalstellen einer $(n+1)$-mal differenzierbaren Funktion machen.

Korollar 4.45. *Sei* $n \geq 0$, $a < x_0 < b$ *und* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $]a,b[$ $(n+1)$*-mal stetig differenzierbar.*
Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0\,.$

1. *Falls* n *gerade ist und* x_0 *lokale Extremalstelle, folgt* $f^{(n+1)}(x_0) = 0\,.$
2. *Falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ *so ist* x_0 *eine strikte lokale Minimalstelle.*
3. *Falls* n *ungerade ist und* $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ *so ist* x_0 *eine strikte lokale Maximalstelle.*

Beweis. Nach Korollar 4.44 gibt es für alle $x \in \,]a,b[$ ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(1): Für $x \neq x_0$ folgt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Aus der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ folgt insbesondere:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(x_0)$$

und

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(x_0).$$

Da x_0 lokale Extremalstelle für f ist und $n+1$ ungerade, folgt dass $\lim\limits_{x \to x_0^+}$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, woraus $f^{(n+1)}(x_0) = 0$ folgt.
(2): Sei n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$. Aus der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ folgt die Existenz von $\delta > 0$ mit

$$f^{(n+1)}(\xi) > 0 \qquad \forall \xi \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,.$$

Für $x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[$ und ξ wie oben folgt

$$f(x) = f(x_0) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Da $n+1$ gerade ist, folgt nun

$$\forall x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,, \quad x \neq x_0 : \quad f(x) > f(x_0).$$

(3): Beweis analog. $\square$

Wir wollen hier einen oft angewendeten Spezialfall von Korollar 4.45 hervorheben:

Korollar 4.46. *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und in* $]a,b[$ *zweimal stetig differenzierbar. Sei* $a < x_0 < b$ *. Annahme:* $f'(x_0) = 0$ *.*

1. *Falls* $f^{(2)}(x_0) > 0$ *ist* x_0 *strikte lokale Minimalstelle.*

2. *Falls* $f^{(2)}(x_0) < 0$ *ist* x_0 *strikte lokale Maximalstelle.*

Beispiel 4.47. Sei $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Wir bestimmen die lokalen Extremalstellen von f. Sei x_0 eine solche; dann folgt nach Satz 4.15(3):

$$f'(x_0) = 0,$$

das heisst

$$4x_0^3 - 2x_0 = 0.$$

Also gilt $x_0 \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Nun ist $f^{(2)}(x) = 12x^2 - 2$;

$$f^{(2)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$
$$f^{(2)}(0) = -2 < 0.$$

Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ strikte lokale Minimalstellen, und 0 strikte lokale Maximalstelle.

5 Das Riemann Integral

Die Integralrechnung ist viel älter als die Differentialrechnung; die Berechnung von Flächeninhalten, Volumina etc. haben Mathematiker wie Archimedes (287 - 212 v. Chr.), Kepler (1571 - 1630), Cavalieri (1598 - 1647), Fermat (1607 - 1665) und weitere beschäftigt. Der entscheidende Durchbruch ist Newton, Leibniz und Johann Bernoulli zu verdanken: Sie zeigten unabhängig, dass die Operation der Integration die Umkehrung der Operation der Ableitung ist.

5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

In diesem Kapitel sind $a < b$ reelle Zahlen und $I = [a,b]$.

Definition 5.1. *Eine* **Partition** *von* I *ist eine endliche Teilmenge* $P \subsetneq [a,b]$ *wobei* $\{a,b\} \subseteq P$ *.*

Offensichtlich gilt

$$n := \operatorname{card} P - 1 \geq 1$$

und es gibt genau eine Bijektion

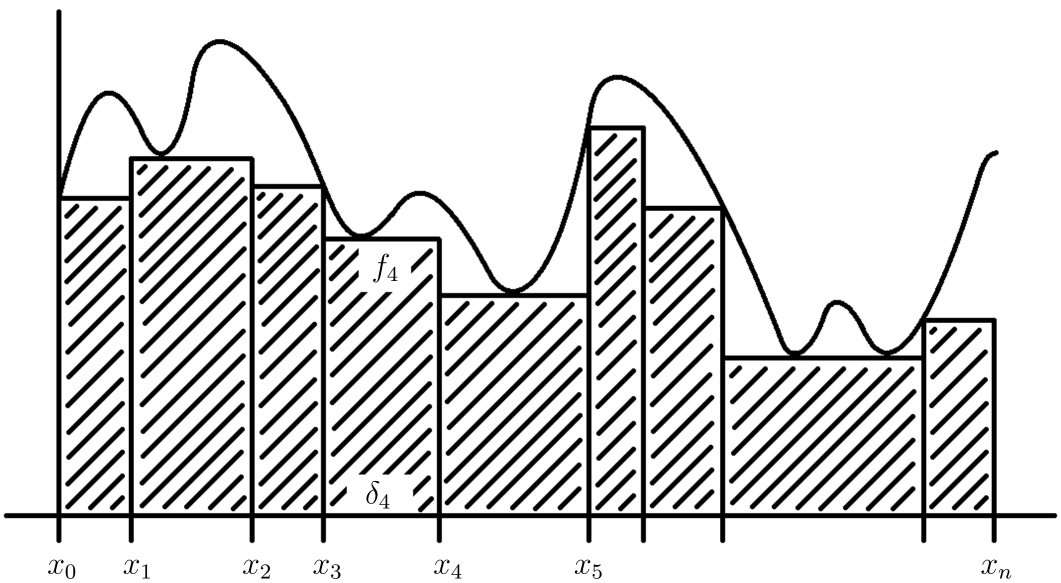
$$\begin{aligned} \{0,1,2,\dots,n\} &\longrightarrow P \\ j &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft $i < j \implies x_i < x_j$.
Eine Partition P' ist eine Verfeinerung von P falls $P \subseteq P'$. Offensichtlich ist die Vereinigung $P_1 \cup P_2$ zweier Partitionen wieder eine Partition, insbesondere haben zwei Partitionen immer eine gemeinsame Verfeinerung.

Sei nun $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (siehe Def. 3.1(3)), das heisst es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.
Sei auch $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Partition von I. Insbesondere gilt

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Wir bezeichnen mit $\delta_i := x_i - x_{i-1}, \quad i \geq 1$, die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$.

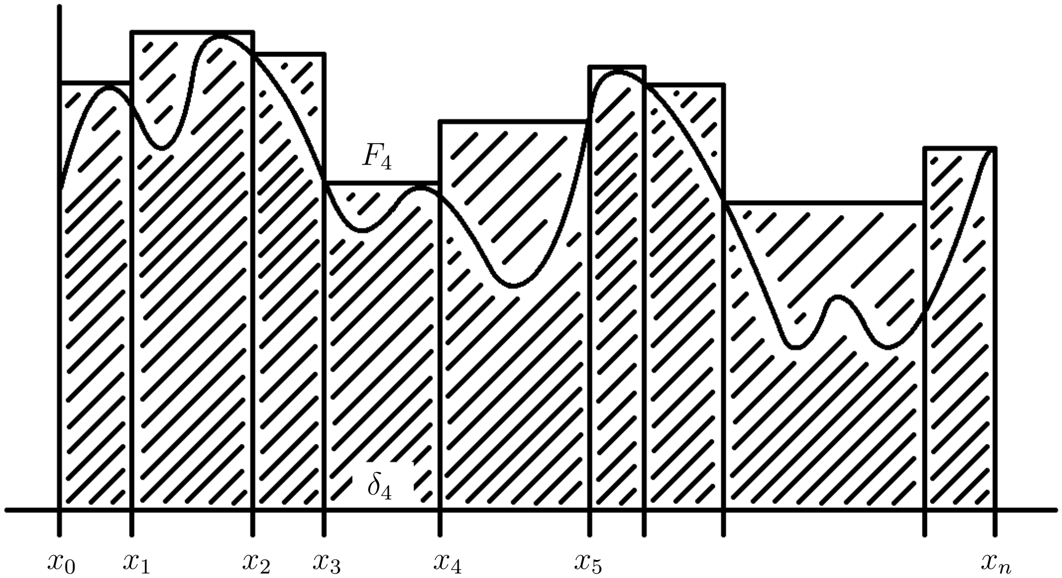


Wir definieren die Untersumme

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \qquad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

und die Obersumme

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \qquad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$



Bemerke, dass

$$-M \leq f_i \leq F_i \leq M,$$

somit sind $s(f, P)$ und $S(f, P)$ wohldefiniert und es gilt:

$$-M(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, p) \leq M(b-a).$$

Lemma 5.2. 1. Sei P' eine Verfeinerung von P, dann gilt:

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

2. Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Beweis. (1): Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und P' eine Verfeinerung von P die durch hinzufügen eines Punktes y zu P entsteht. Sei $y \in \,]x_{i-1}, x_i[$.
Dann ist

$$s(f, P') = \sum_{j \neq i} \delta_j f_j + (y - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq y} f(x) + (x_i - y) \inf_{y \leq x \leq x_i} f(x).$$

Nun gilt aber:

$$\inf_{x_{i-1} \leq x \leq y} f(x) \geq \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f_i$$
$$\inf_{y \leq x \leq x_i} f(x) \geq \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f_i$$

woraus folgt:

$$s(f, P') \geq \sum_{j \neq i} \delta_j f_j + \underbrace{(y - x_{i-1}) f_i + (x_i - y) f_i}_{(x_i - x_{i-1}) f_i = \delta_i f_i} = s(f, P).$$

Eine allgemeine Verfeinerung P' von P lässt sich als sukzessive ein-Punkt-Verfeinerungen von P ausgehend darstellen. Die Ungleichung $S(f,P') \leq S(f,P)$ wird analog bewiesen; die Ungleichung $s(f,P') \leq S(f,P')$ ist vor Lemma 5.2 schon bemerkt worden.
(2): Da $P_1 \cup P_2$ eine Verfeinerung von P_1 ist, folgt aus (1):

$$s(f,P_1) \leq s(f,P_1 \cup P_2) \leq S(f,P_1 \cup P_2) \leq S(f,P_2).$$

□

Sei nun $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen von I. Wir definieren:

$$s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$$
$$S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P).$$

Aus Lemma 5.2(2) folgt $s(f) \leq S(f)$.

Definition 5.3. *Eine beschränkte Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist* **Riemann integrierbar** *(oder kurz: integrierbar), falls*

$$s(f) = S(f).$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ *und* $S(f)$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Satz 5.4. *Eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists P \in \mathcal{P}(I) \quad \textit{mit} \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Beweis. Die Funktion f ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists P_1, P_2$ Partitionen, so dass

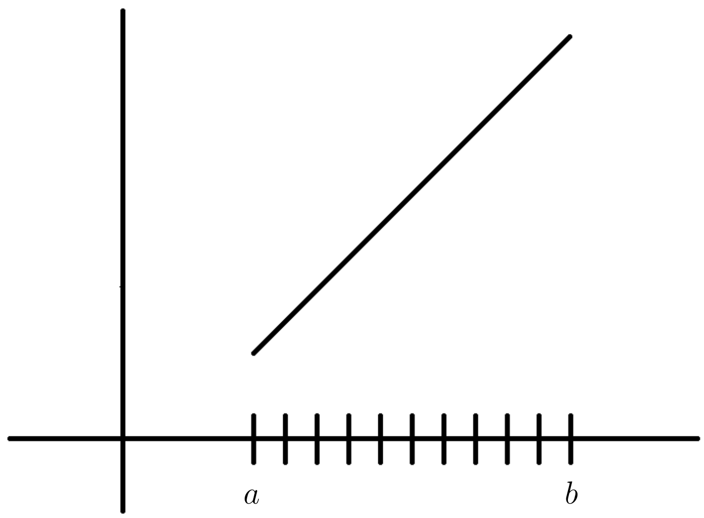
$$S(f,P_2) - s(f,P_1) < \epsilon.$$

In diesem Fall folgt mit $P = P_1 \cup P_2$ aus

$$S(f,P_2) \geq S(f,P) \geq s(f,P) \geq s(f,P_1)$$
$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Die Umkehrung ist klar. □

Beispiel 5.5. $f(x) = x$, auf $[a, b]$:



Sei $P_n = \{a + i \cdot h : \ 0 \leq i \leq n\}$ wobei $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Dann ist

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\,(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)h) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left\{ na + h \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right\} = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right) \end{aligned}$$

und

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,(x_i - x_{i-1}) = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{n\to\infty} s(f, P_n).$$

Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Beispiel 5.6. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Da jedes Intervall positiver Länge sowohl rationale wie irrationale Zahlen enthält, folgt $s(f, P) = 0$ und $S(f, P) = 1 \quad \forall P \in \mathcal{P}(I)$. Also ist f nicht integrierbar.

Beispiel 5.7. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \quad p,q \text{ natürliche Zahlen, teilerfremd.} \end{cases}$$

Es ist eine interessante Übung zu zeigen, dass f integrierbar ist und $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Folgendes Integrabilitätskriterium führt zu einer Charakterisierung des Integrals als Grenzwert und Integrierbarkeit als Existenz dieses Grenzwertes.

Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875)**.**
Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die Menge der Partitionen P für welche $\max\limits_{1\le i\le n} \delta_i \le \delta$.

Beweis. Sei f beschränkt mit

$$|f(x)| \le M \qquad \forall x \in [a,b]$$

und integrierbar. Sei $\epsilon > 0$ und P eine Partition mit

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Sei $Q = \{y_0, \ldots, y_m\}$ eine beliebige Partition mit $\max\limits_{1\le i\le m} (y_i - y_{i-1}) \le \delta$. Aus

$$S(f,P) \ge S(f, P\cup Q) \ge s(f, P \cup Q) \ge s(f,P)$$

folgt:

$$S(f, P\cup Q) - s(f, P\cup Q) < \epsilon.$$

Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Die Obersumme $S(f,Q) \quad (\ge S(f, P\cup Q))$ unterscheidet sich von $S(f, P\cup Q)$ nur in den Intervallen $[y_{i-1}, y_i]$ für welche

$$]y_{i-1}, y_i[\, \cap P \neq \emptyset.$$

Falls wir $\delta < \min\limits_{1\le j\le n} (x_j - x_{j-1})$ wählen, dann enthält solch ein $]y_{i-1}, y_i[$ genau ein $x_k \in P$. Dann ist

$$(y_i - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x) = ((y_i - x_k) + (x_k - y_{i-1})) \sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x).$$

Nun schätzen wir ab:

$$\sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x) \le \sup_{[y_{i-1},x_k]} f(x) + 2M$$

$$\sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x) \le \sup_{[x_k,y_i]} f(x) + 2M.$$

Also:

$$(y_i - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1},y_i]} f(x) \leq (y_i - x_k) \sup_{[x_k,y_i]} f(x) + (x_k - y_{i-1}) \sup_{[y_{i-1},x_k]} f(x) + (y_i - y_{i-1})\, 2M.$$

Da es höchstens $(n-1)$ Intervalle mit

$$]y_{i-1}, y_i[\cap P \neq \emptyset$$

gibt, folgt:

$$S(f,Q) \leq S(f, P \cup Q) + 2Mn\delta.$$

Ein analoges Argument zeigt:

$$s(f, P \cup Q) \leq s(f,Q) + 2Mn\delta$$

woraus mit

$$S(f, P \cup Q) - s(f, P \cup Q) < \epsilon,$$

$$S(f,Q) - s(f,Q) < \epsilon + 4Mn\delta$$

folgt. Falls also $\delta < \min\left\{\frac{\epsilon}{4Mn}, \min_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})\right\}$ folgt

$$S(f,Q) - s(f,Q) < 2\epsilon,$$

und der Satz ist bewiesen. □

In der Folge ist es zweckmässig für eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ die Zahl

$$\delta(P) = \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

einzuführen.
Sei P eine Partition und zudem wählen wir $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist

$$\sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i$$

eine Riemannsche Summe.

Korollar 5.9. *Die beschränkte Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist genau dann integrierbar mit* $A := \int_a^b f(x)\,dx$ *falls:*
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ *so dass* $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ *Partition mit* $\delta(P) < \delta$ *und* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *mit* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, \quad P = \{x_0, \ldots, x_n\}\,,$

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon.$$

Beweis. Den Beweis überlassen wir als Übung. □

5.2 Integrierbare Funktionen

Bis jetzt haben wir gesehen, dass konstante Funktionen sowie die Funktion $f(x) = x$ auf jedem kompakten Intervall integrierbar sind. Mit folgendem Satz vergrössern wir unseren Vorrat an integrierbaren Funktionen.

Satz 5.10. *Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und $\dfrac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$) integrierbar.*

Bemerkung 5.11. Sei $\phi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist

$$\sup_{x,y\in[c,d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x\in[c,d]} \phi(x) - \inf_{x\in[c,d]} \phi(x). \qquad (*)$$

Einerseits gilt offensichtlich $\forall x, y \in [c, d]$:

$$\phi(x) \leq \sup_{[c,d]} \phi, \qquad \phi(y) \geq \inf_{[c,d]} \phi$$

also

$$\phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{[c,d]} \phi - \inf_{[c,d]} \phi$$

woraus durch vertauschen von x, y folgt:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{[c,d]} \phi - \inf_{[c,d]} \phi.$$

Andererseits, sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\xi \in [c, d]$ und $\eta \in [c, d]$ mit:

$$\phi(\xi) > \sup_{[c,d]} \phi - \epsilon \quad \text{und} \quad \phi(\eta) < \inf_{[c,d]} \phi + \epsilon$$

woraus

$$\phi(\xi) - \phi(\eta) > \sup_{[c,d]} \phi - \inf_{[c,d]} \phi - 2\epsilon$$

folgt. Dies zeigt die Aussage $(*)$.

Beweis von Satz 5.10. Sei $\epsilon > 0$ und P_1, P_2 Partitionen mit

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) < \epsilon,$$

$$S(g, P_2) - s(g, P_2) < \epsilon.$$

Mit $P = P_1 \cup P_2$ folgt also

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon,$$
$$S(g, P) - s(g, P) < \epsilon.$$

Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, $F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, $f_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$, $G_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g$, $g_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g$.

(1): Sei $h(x) = f(x) + g(x)$. Dann folgt für alle $x, y \in [a, b]$:

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x) - f(x)| + |g(x) - g(y)|.$$

Mit $H_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} h, \quad h_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} h$ folgt dann aus Bemerkung 5.11:

$$H_i - h_i \leq F_i - f_i + G_i - g_i.$$

Also

$$\sum_{i=1}^{n} (H_i - h_i)\, \delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)\, \delta_i + \sum_{i=1}^{n} (G_i - g_i)\, \delta_i,$$

$$S(f+g, P) - s(f+g, P) \leq S(f, P) - s(f, P) + S(g, P) - s(g, P) \leq 2\epsilon.$$

Daraus folgt, dass $f + g$ integrierbar ist.
(2): $h = \lambda \cdot f$: Wird als Übung überlassen.
(3): $h = f \cdot g$: $\forall x, y \in [a, b]$ gilt

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|.$$

Sei $M \geq 0$ mit

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(y)| \leq M \qquad \forall x, y \in [a, b].$$

Dann folgt

$$|h(x) - h(y)| \leq M|g(x) - g(y)| + M|f(x) - f(y)|.$$

Mit $H_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} h, \quad h_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} h$ folgt dann wieder aus Bemerkung 5.11:

$$H_i - h_i \leq M\,(G_i - g_i) + M\,(F_i - f_i)$$

Also

$$S(f \cdot g, P) - s(f \cdot g, P) \leq M\,(S(g, P) - s(g, P)) + M\,(S(f, P) - s(f, P)) < 2M\epsilon.$$

(4): $h = |f|$: Übung.
(5): $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ folgen aus aus (1) und (4).

(6): Es genügt (nach (2)) zu zeigen, dass $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ integrierbar ist, sofern $|g(x)| \geq \beta > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(x)||g(y)|} \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{\beta^2}$$

woraus die Integrabilität von h leicht folgt. □

Aus Satz 5.10 folgt dann:

Korollar 5.12. *Seien P, Q Polynome und $[a,b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist*

$$\begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

integrierbar.

Wir werden jetzt zeigen, dass auf einem kompakten Intervall eine stetige Funktion immer integrierbar ist. Dies beruht auf einer wesentlichen Eigenschaft, nämlich gleichmässige Stetigkeit.

Definition 5.13. *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D* **gleichmässig stetig**, *falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D$:*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Beispiel 5.14. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig aber nicht gleichmässig stetig.

Satz 5.15 (Heine 1872)**.** *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.*

Beweis. Ansonsten gibt es $\epsilon > 0$ so dass $\forall \delta_n = \frac{1}{n}$, gibt es x_n, y_n in $[a,b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.
Sei $\left(y_{l(n)}\right)_{n \geq 1}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_{l(n)}$. Da

$$\left|x_{l(n)} - y_{l(n)}\right| < \frac{1}{l(n)},$$

folgt dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_{l(n)} = y$. Aus der Stetigkeit von f in y folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \left|f(x_{l(n)}) - f(y_{l(n)})\right| = |f(y) - f(y)| = 0,$$

also ein Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \quad \forall n \geq 1$. □

Folgender Satz folgt dann relativ schnell:

Satz 5.16. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Da $[a,b]$ ein kompaktes Intervall ist, folgt aus dem min-max Satz, dass f beschränkt ist.
Sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass, nach Satz 5.15,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition mit $\delta(P) < \delta$. Für jedes $1 \le i \le n$ und alle $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ folgt dann $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ und deshalb (Bemerkung 5.11)

$$F_i - f_i \le \epsilon$$

woraus

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)\,\delta_i \le \epsilon\,(b-a)$$

folgt. Also ist f integrierbar. □

Es gibt auch Klassen von Funktionen die Unstetigkeitspunkte annehmen können und dennoch integrierbar sind.

Satz 5.17. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Wir nehmen an, f ist monoton wachsend. Dann folgt:

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

und insbesondere ist f beschränkt.
Sei $\epsilon > 0$ und $n \ge 1$ eine natürliche Zahl mit

$$(f(b) - f(a))\,\frac{b-a}{n} < \epsilon.$$

Sei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ die Partition von $[a,b]$ wie folgt definiert:

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \qquad 0 \le i \le n.$$

Dann ist $\delta_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ und da f monoton steigend ist, folgt:

$$F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i) = \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f = f_{i+1}$$

für alle $1 \le i \le n-1$. Also:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)\,\delta_i = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i)\,.$$

Ausserdem:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i) = F_1 - f_1 + F_2 - f_2 + \cdots + F_n - f_n = -f_1 + F_n = f(b) - f(a)$$

woraus folgt:

$$S(f,P) - s(f,P) = (f(b) - f(a))\left(\frac{b-a}{n}\right) < \epsilon$$

und f ist integrierbar. □

Bemerkung 5.18. Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $f\big|_{[a,b]}$ und $f\big|_{[b,c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \tag{$*$}$$

In der Tat ergibt die Summe einer Obersumme (respektive Untersumme) für $f\big|_{[a,b]}$ und $f\big|_{[b,c]}$ eine Obersumme (respektive Untersumme) für f.

Wir erweitern jetzt die Definition von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ auf:

$$\begin{aligned} &\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{und falls } a < b\,, \\ &\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dann gilt $(*)$ für alle Tripel a, b, c unter den entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen.

Mit diesen Konventionen gilt:

Satz 5.19. *Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\ dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.d.A) können wir $a < b$ annehmen. Aus Satz 5.10 schliessen wir, dass $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ integrierbar ist. Sei (siehe Korollar 5.9) $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass für jede Partition P mit $\delta(P) < \delta$ die entsprechenden Riemannschen Summen sowohl

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\ dx$$

wie auch

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x)\,dx$$

bis auf ϵ approximieren (siehe Korollar 5.9). Dann folgt für $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$:

$$\left| \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\ dx - \sum_{i=1}^n (\lambda_1 f_1(\xi_i) + \lambda_2 f_2(\xi_i))\,\delta_i \right| < \epsilon,$$

$$\left| \int_a^b f_1(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\delta_i \right| < \epsilon,$$

$$\left| \int_a^b f_2(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\delta_i \right| < \epsilon.$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1 f_1(\xi_i)+\lambda_2 f_2(\xi_i)) = \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\right)+\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\right),$$

woraus folgt:

$$\left|\int_a^b (\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\ dx - \lambda_1\int_a^b f_1(x)\,dx - \lambda_2\int_a^b f_2(x)\,dx\right| < (1+|\lambda_1|+|\lambda_2|)\,\epsilon.$$

Da letztere Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt der Satz. $\square$

5.3 Ungleichungen und der Mittelwertsatz

Nebst Linearität (siehe Satz 5.19) hat das Riemann Integral auch eine Monotonieeigenschaft; diese wiederum führt zum Mittelwertsatz der die Basis des Fundamentalsatzes der Differentialrechnung bildet.

Satz 5.20. *Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und*

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dann folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Da nach Satz 5.19,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\ dx$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\ dx \ge 0.$$

Da $g(x) - f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, gilt für jede Partition P von $[a,b]$:

$$S(g-f,P) \ge s(g-f,P) \ge 0$$

und somit folgt

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\ dx \ge 0.$$

$\square$

Korollar 5.21. *Falls $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Wende Satz 5.20 auf folgende Ungleichungen an:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Dann folgt

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

und aus der ersten Ungleichung,

$$-\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

woraus

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

folgt. $\square$

Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859: Die Cauchy-Schwarz Ungleichung)**.**
Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt integrierbar. Dann gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

Beweis. Aus Satz 5.10 folgt, dass $f \cdot g,\ f^2,\ g^2$ beschränkt und integrierbar sind.
Aus der Monotonie (Satz 5.20) und Linearität (Satz 5.19) des Integrals folgt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - tg(x))^2\, dx = \int_a^b f^2(x)\, dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)\, dx + t^2 \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Sei

$$A = \int_a^b f^2(x)\, dx, \quad B = \int_a^b f(x)g(x)\, dx, \quad C = \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Dann folgt:

$$A - 2tB + Ct^2 \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Falls $C = 0$ folgt $B = 0$ und die Ungleichung ist bewiesen.
Falls $C \neq 0$ kann die Diskriminante der quadratischen Gleichung nicht strikt positiv sein, somit folgt

$$B^2 \leq A \cdot C$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

Als Anwendung der Monotonieeigenschaft des Integrals, des Zwischenwertsatzes sowie des Min-Max Theorems beweisen wir jetzt:

Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821)**.** *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis. Nach dem Min-Max Satz, seien u, v in $[a,b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Dann folgt:

$$f(u)\int_a^b \mathit{1}\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(v)\int_a^b \mathit{1}\,dx,$$

also

$$f(u)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(v)(b-a).$$

O.E.d.A: $a < b$.
Also folgt:

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(v).$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt:

$$f\left([a,b]\right) = \left[f(u), f(v)\right],$$

insbesondere gibt es $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Beispiel 5.24. Die Stetigkeit ist eine wichtige Voraussetzung:
Sei

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathit{0}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathit{1}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Die Beweisidee im Mittelwertsatz kann ausgenützt werden um zu zeigen:

Satz 5.25 (Cauchy 1821)**.** *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

5.4 Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Dieser Satz, auch Fundamentalsatz der Analysis genannt, besagt, dass die Ableitung die Umkehrung des Integrals ist. Dieser Satz hat vielseitige Anwendungen, unter anderem die Berechnung von Flächeninhalten und Längen von Kurven.

Satz 5.26. *Seien $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b$$

ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

Beweis. Seien : $x, x_0 \in [a, b]$. Aus 5.18(∗) folgt:

$$\int_a^{x_0} f(t)\, dt + \int_{x_0}^x f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Also:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt.$$

Aus dem Mittelwertsatz (Satz 5.23) schliessen wir, dass es ξ zwischen x_0 und x gibt mit:

$$\int_{x_0}^x f(t)\, dt = f(\xi)(x - x_0).$$

Für $x \neq x_0$ folgt:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi).$$

Und da ξ zwischen x_0 und x liegt, folgt aus der Stetigkeit von f:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

und der Satz ist bewiesen. □

Dieser Satz motiviert folgende Definition:

Definition 5.27. *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst* **Stammfunktion** *von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.*

Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Existenz von F ist durch 5.26 gegeben; falls F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, folgt

$$F_1' - F_2' = f - f = 0,$$

das heisst

$$(F_1 - F_2)' = 0.$$

Aus Korollar 4.18(1) folgt, dass $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion ist.
Sei nun F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gibt es eine Konstante C mit:

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Insbesondere folgt:

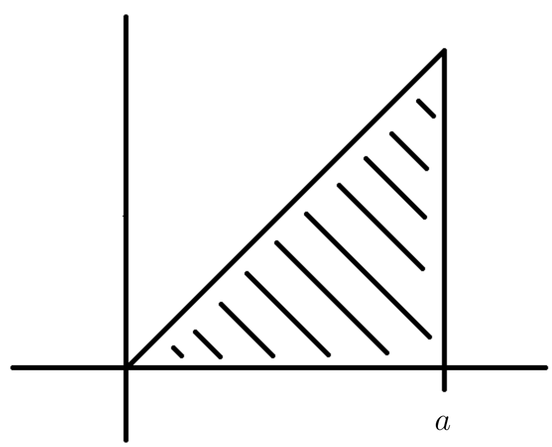
$$F(b) = C + \int_a^b f(t)\,dt, \quad F(a) = C,$$

und folglich:

$$F(b) - F(a) = C + \int_a^b f(t)\,dt - C = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

Beispiel 5.29. 1. $f(x) = x$:

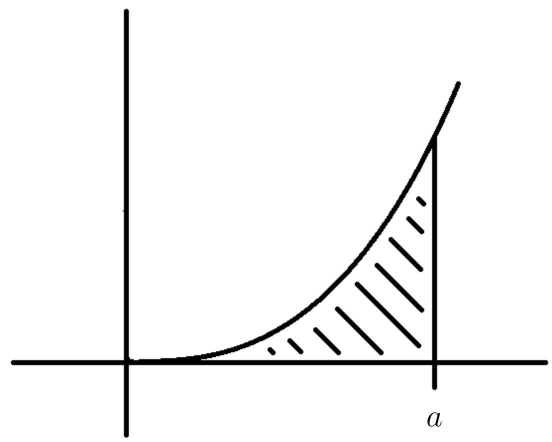


Dann ist $\dfrac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f und folglich:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

Dies ist der Flächeninhalt des schraffierten Gebietes.

2. $f(x) = x^2$:



Dann ist $\dfrac{x^3}{3}$ Stammfunktion von f und folglich:

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

Zur Berechnung von Integralen und Stammfunktionen werden wir zwei Rechenregeln aus dem Fundamentalsatz herleiten. Es handelt sich um Partielle Integration und Substitution.

Satz 5.30 (Partielle Integration)**.** *Seien $a < b$ relle Zahlen und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis. Die Funktion $H := f \cdot g$ ist stetig differenzierbar und ihre Ableitung ist nach Satz 4.9(2):

$$H' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Also ist H Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ und es folgt aus Satz 5.28:

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = H(b) - H(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Der Satz folgt dann aus der Linearität des Integrals. □

Satz 5.31 (Substitution)**.** *Sei $a < b$, $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall $[c, d] \supseteq \phi([a, b])$. Dann ist nach der Kettenregel (Satz 4.11) $F \circ \phi$ eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(\phi(t))\,\phi'(t). \end{aligned}$$

Dann folgt aus 5.28:

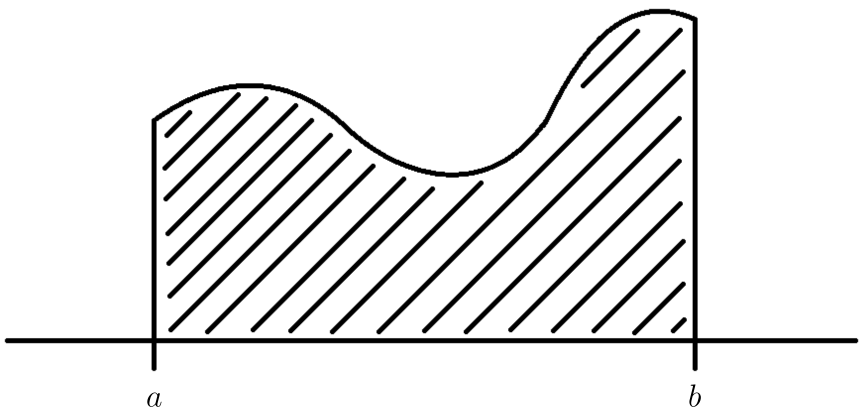
$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)).$$

Da F Stammfunktion von f ist, folgt nach 5.28:

$$F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$$

und der Satz ist bewiesen. □

Anwendung 5.32. Sei $f : [a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$ beschränkt integrierbar.



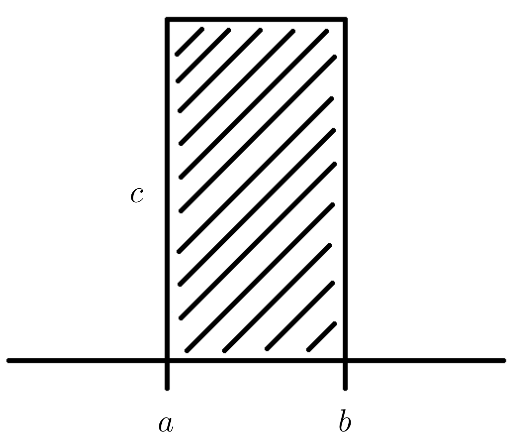
Dann definieren wir den Flächeninhalt der Region

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}$$

als

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

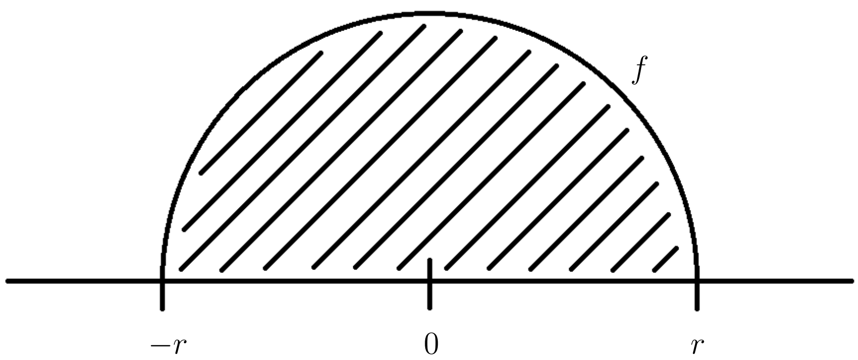
Dies verallgemeinert den naiven Flächeninhaltsbegriff der euklidischen Geometrie. Denn für $f(x) = c$:



gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b 1\,dx = c(b-a).$$

Sei nun $r > 0$ und $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ definiert auf $[-r, r]$.

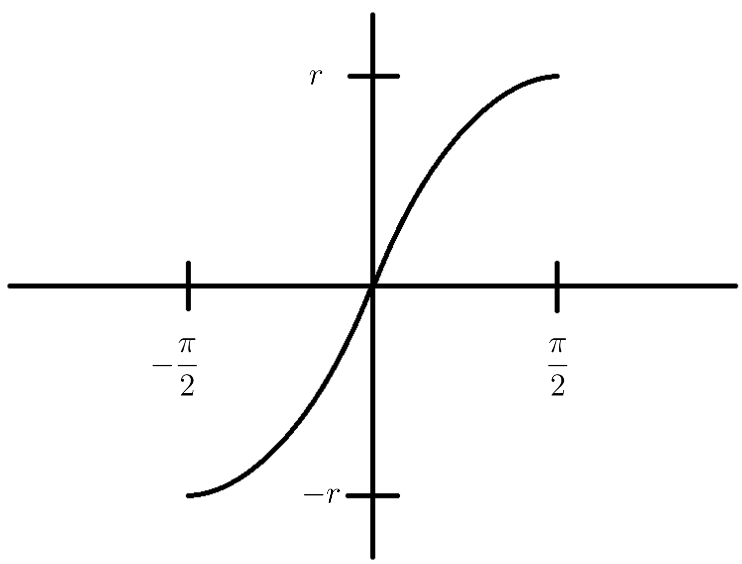


Wir berechnen jetzt

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Sei

$$\begin{aligned} \phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-r, r] \\ t &\longmapsto r \cdot \sin t \end{aligned}$$



Dann folgt aus Satz 5.31:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx &= \int_{\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r \cdot \cos t\,dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\;\cos t\,dt \end{aligned}$$

Da $\cos t \geq 0$ für $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ folgt $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ und somit ist

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt.$$

Um $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$ zu berechnen, benützen wir jetzt partielle Integration.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)}\, dt$$

wobei $g(t) = \sin t$. Also ist dies nach Satz 5.30 gleich

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)\sin t\, dt \\ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right)\, dt\end{aligned}$$

Also:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

woraus

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

folgt. Dies zeigt:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} r^2.$$

Korollar 5.33. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.*

1. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a + c$, $b + c$ in I enthalten ist. Dann gilt:*

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(t + c)\, dt.$$

2. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt:*

$$\int_{a}^{b} f(ct)\, dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)\, dx.$$

Beweis. (1): O.E.d.A. können wir $a < b$ annehmen. Wir wenden dann Satz 5.31 auf

$$\phi(t) = t + c$$

an.
(2): O.E.d.A. können wir $a < b$ annehmen. Wir wenden dann Satz 5.31 auf

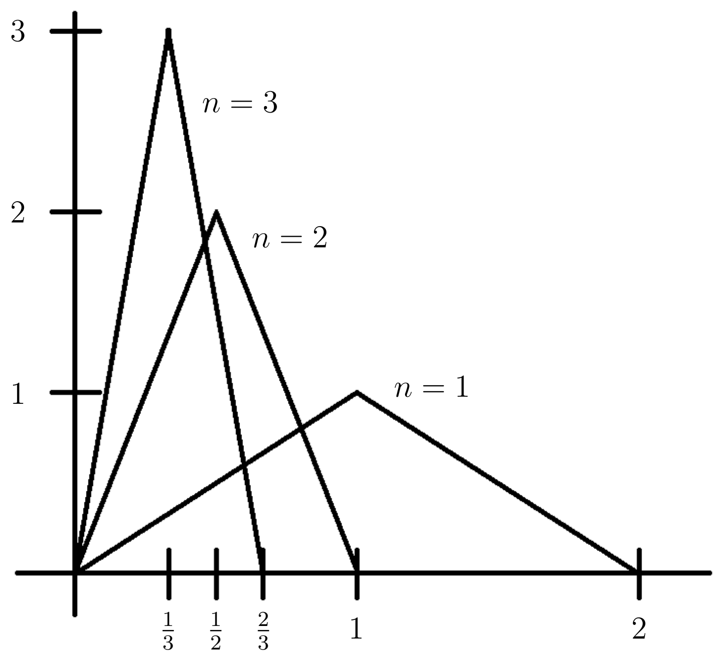
$$\phi(t) = c \cdot t$$

an. □

5.5 Integration konvergenter Reihen

Wir beginnen mit folgendem Beispiel:
Für $n \geq 1$ sei:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,2]$
2. $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n \geq 1.$

Also folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Beachte, dass f_n punktweise aber nicht gleichmässig gegen 0 konvergiert.

Satz 5.34. *Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Die Voraussetzung besagt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1 \text{ so dass } \forall n \geq N: \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a,b].$$

Insbesondere folgt $\forall x, y \in [a,b]$:

$$|f(x) - f(x)| \leq |f_N(x) - f_N(y)| + 2\epsilon$$

Falls $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Partition von $[a,b]$ bezeichnet, folgt nach 5.11:

$$(F_i - f_i) \leq (F_{Ni} - f_{Ni}) + 2\epsilon$$

Da f_N integrierbar ist, gibt es $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

$$S(f_N, P) - s(f_N, P) < \epsilon$$

woraus

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon + 2\epsilon(b-a) = \epsilon\,(1 + 2(b-a))$$

folgt und somit ist f integrierbar. Mittels der Integrabilität von f folgt dann aus Korollar 5.21 :

$$\begin{aligned}\forall n \geq N: \quad \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \epsilon(b-a).\end{aligned}$$

□

Unmittelbar folgt aus Satz 5.34:

Korollar 5.35. *Sei* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Folge beschränkter integrierbarer Funktionen so dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

auf $[a,b]$ *gleichmässig konvergiert. Dann gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Korollar 5.36. *Sei*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k x^k$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. *Dann ist für jedes* $0 \leq r < \rho$, f *auf* $[-r, r]$ *integrierbar und es gilt* $\forall x \in]-\rho, \rho[$ *:*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Beispiel 5.37. Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

hat Konvergenzradius 1. Es folgt aus Beispiel 4.13 und Satz 5.28:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

mit selbem Konvergenzradius.
Sei nun $0 \le x < 1$:

$$\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k}(-1)^{k-1} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \cdots$$

Aus Leibniz (Satz 2.48) folgt $\forall x \in [0,1[$:

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \le \ln(1+x) - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{x^k}{k}(-1)^{k-1}\right) \le \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Da $\lim\limits_{x\to 1^-}$ existiert, folgt:

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \le \ln 2 - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \le \frac{1}{2n+1}$$

woraus folgt:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Beispiel 5.38. Wir wollen jetzt ausnützen (siehe Beispiel 4.19), dass:

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nun ist wiederum:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

und mit dem selben Argument wie in Beispiel 5.37 folgt:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

mit Konvergenzradius 1. Da

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

folgt wie in 5.37:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Beispiel 5.39 (Fibonacci Zahlen)**.**
Seien $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und für $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
Wir erhalten die Fibonacci Folge:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots$$

und wollen eine Formel für a_n herleiten.
Einer Idee von Euler folgend definieren wir:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \cdots$$

Mittels Induktion zeigt man leicht:

$$a_n \leq 2^n \quad \forall n \geq 0$$

und somit hat die Potenzreihe $+\infty$ als Konvergenzradius. Nach Satz 4.40 können wir gliedweise ableiten und erhalten:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
f''(x) &= a_2 + a_3 x + a_4 \frac{x^2}{2!} + \cdots = (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)\, x + (a_2 + a_3)\, \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_1 + a_2 x + a_3 \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
&= f(x) + f'(x).
\end{aligned}$$

Also erfüllt f die Differentialgleichung

$$f''(x) = f(x) + f'(x)$$

und zudem:

$$f(0) = a_0 = 1, \qquad f'(0) = a_1 = 1.$$

Wir wollen daraus eine Formel für f herleiten.
Sei $g(x) = e^{\lambda x}$; dann folgt

$$g''(x) - g(x) - g'(x) = e^{\lambda x} \left(\lambda^2 - 1 - \lambda\right)$$

und folglich erfüllen

$$g_1(x) = \exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} x\right) \quad \text{und} \quad g_2(x) = \exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} x\right)$$

sowie jede Linearkombination $c_1 g_1 + c_2 g_2$ die Gleichung $g'' = g + g'$.
Mit

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \qquad c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

erfüllt $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ die Gleichung $g''(x) = g(x) + g'(x)$ sowie $g(0) = g'(0) = 1$.
Sei also $h(x) = f(x) - g(x)$. Dann gilt folgendes:

1. h ist Summe von drei konvergenten Potenzreihen, also ist h Summe einer konvergenten Potenzreihe.

2. $h(0) = h'(0) = 0$

3. $h''(x) = h(x) + h'(x)$.

Aus (3) folgt $h^{(j+2)}(x) = h^{(j)}(x) + h^{(j+1)}(x)$ und zusammen mit (2) folgt:

$$h^{(j)}(0) = 0 \qquad \forall j \geq 0$$

woraus mit (1), $h = 0$ folgt.
Wir haben also gezeigt:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right) \exp\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) \exp\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$$

Es folgt:

$$a_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Unter Anwendung des Binomialsatzes folgt

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n+1}{2i+1} 5^i.$$

5.6 Euler-McLaurin Summationsformel

Diese Formel, die unabhängig von Euler (1736) und McLaurin (1742) entwickelt wurde, ist ein sehr nützliches Instrument um Summen wie

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

oder

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!$$

abzuschätzen. Sie wird uns auch erlauben eine Formel für

$$1^l + 2^l + \cdots + n^l$$

für jedes $l \geq 1$ herzuleiten.
In der Euler-McLaurin'schen Formel spielen eine Folge von Polynomen, nämlich die Bernoulli Polynome $B_n(x)$ sowie $B_n = B_n(0)$, die Bernoulli Zahlen eine wichtige Rolle.

Sei $P_0 = 1$. Es gibt eine Folge von Polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ die eindeutig durch folgende zwei Eigenschaften bestimmt ist:

1. $P_k' = P_{k-1}, \quad k \geq 1.$

2. $\displaystyle\int_0^1 P_k(x)\,dx = 0 \quad \forall k \geq 1.$

Via Induktion: wir nehmen an, $P_0, \ldots, P_{k-1}$ ist eindeutig bestimmt, $k \geq 1$. Dann folgt aus (1):

$$P_k(x) = \int_0^x P_{k-1}(t)\,dt + C$$

wobei C eine zu bestimmende Konstante ist. Offensichtlich ist P_k ein Polynom. Aus der Bedingung (2) folgt:

$$\int_0^1 \int_0^x P_{k-1}(t)\,dt\,dx + C = 0$$

und C, sowie P_k sind damit eindeutig bestimmt.

Definition 5.40.

$$\forall k \geq 0 \ \text{ ist das } k\text{'te Bernoulli Polynom } \ B_k(x) = k! P_k(x)$$

Mit dieser Definition folgt:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Definition 5.41. *Sei $B_0 = 1$. Für alle $k \geq 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv:*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0.$$

Also:

$$\begin{aligned} &B_0 = 1, \\ &B_0 + 2B_1 = 0, \\ &B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Satz 5.42.

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$$

Beweis. Für $k=0$ folgt $B_0(x)=1$. Sei also $k\geq 1$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0 \qquad \forall k\geq 1$$

und

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x) \qquad \forall k\geq 1.$$

Zum Ersten:

$$\int_0^1 B_k(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i\int_0^1 x^{k-i}\,dx = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i\frac{1}{k-i+1}$$

Nun ist:

$$\binom{k}{i}\frac{1}{k-i+1} = \frac{k!}{i!(k-i+1)!} = \left(\frac{1}{k+1}\right)\frac{(k+1)!}{i!(k-i+1)!} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}$$

Folglich:

$$\int_0^1 B_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i}_{=0 \text{ nach } 5.41}$$

Zum Zweiten:

$$B_k'(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i(k-i)x^{k-i-1}$$

Nun ist für $0\leq i\leq k-1$:

$$\binom{k}{i}(k-i) = \frac{k!}{i!(k-i-1)!} = k\cdot\binom{k-1}{i}$$

woraus folgt:

$$B_k'(x) = k\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}B_i x^{k-1-i} = kB_{k-1}(x).$$

$\square$

Bemerkung 5.43. Für $k\geq 2$:

$$\begin{aligned} B_k(1) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i + B_k \\ &= B_k \qquad \text{(nach 5.41)} \\ &= B_k(0) \qquad \text{(nach Satz 5.42).} \end{aligned}$$

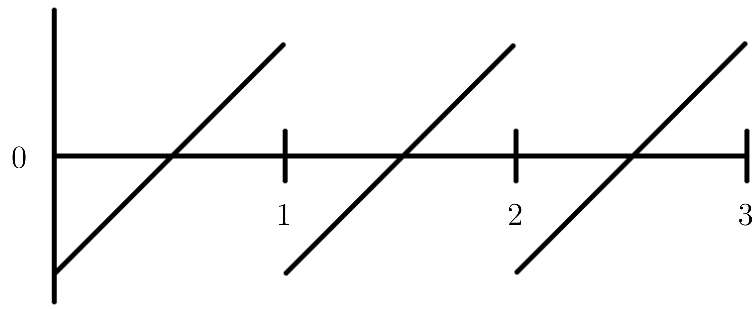
Zur Aussage der Summationsformel definieren wir für $k\geq 1$

$$\widetilde{B}_k : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für } \; 0\leq x<1 \\ B_k(x-n) & \text{für } \; n\leq x<n+1 \quad \text{wobei} \quad n\geq 1. \end{cases}$$

Zum Beispiel für $\widetilde{B}_1$:



Satz 5.44. *Sei* $f : [0,n] \longrightarrow \mathbb{R}$ *k-mal stetig differenzierbar,* $k \geq 1$. *Dann gilt:*

1. *Für* $k = 1$ *:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(f(n) - f(0)\right) + \int_0^n \widetilde{B}_1(x) f'(x)\,dx$$

2. *Für* $k \geq 2$ *:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(f(n) - f(0)\right) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right) + \widetilde{R}_k$$

wobei

$$\widetilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n \widetilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\,dx.$$

Beweis. Für $k = 1$, unter Benützung von 5.30:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)\,dx = B_1(1)f(1) - B_1(0)f(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx$$

Da $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ folgt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(1) + f(0)\right) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx$$

Die Idee ist jetzt diese Formel auf die Funktionen

$$g_i(x) = f(x + i - 1), \quad x \in [0,1], \quad 1 \leq i \leq n$$

anzuwenden. Also:

$$\int_0^1 g_i(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(g_i(1) + g_i(0)\right) - \int_0^1 g_i'(x)B_1(x)\,dx$$

Nun ist:

$$\int_0^1 g_i(x)\,dx = \int_0^1 f(x+i-1)\,dx = \int_{i-1}^i f(x)\,dx \qquad \text{(siehe Korollar 5.33)}$$

$$\frac{1}{2}\left(g_i(1)+g_i(0)\right) = \frac{1}{2}\left(f(i)+f(i-1)\right)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_i'(x)B_1(x)\,dx &= \int_0^1 f'(x+i-1)B_1(x)\,dx = \int_{i-1}^i f'(x)B_1(x-(i-1))\,dx \\ &= \int_{i-1}^i f'(x)\widetilde{B}_1(x)\,dx.\end{aligned}$$

Also gilt für alle $1 \le i \le n$:

$$\int_{i-1}^i f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(i)+f(i-1)\right) - \int_{i-1}^i f'(x)\widetilde{B}_1(x)\,dx$$

Wir summieren von $i=1$ bis $i=n$ und erhalten:

$$\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(0) + (f(1)+\cdots+f(n-1)) + \frac{1}{2}f(n) - \int_0^n f'(x)\widetilde{B}_1(x)\,dx,$$

woraus

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(f(n)-f(0)\right) + \int_0^n f'(x)\widetilde{B}_1(x)\,dx$$

folgt.

Für $k \ge 2$: Wir beginnen mit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx$$

und wenden partielle Integration auf $\int_0^1 f'(x)B_1(x)dx$ an:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)B_2'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0) - \int_0^1 f''(x)B_2(x)\,dx\right\}\end{aligned}$$

Nun ist nach Satz 5.42 für $k \ge 2$

$$B_k(1) = B_k(0) = B_k.$$

Insbesondere

$$\int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(B_2f'(1) - B_2f'(0)\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)B_2(x)\,dx$$

woraus folgt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) - \frac{B_2}{2!}\left(f'(1)-f'(0)\right) + \frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x) f''(x)\,dx$$

Wir können diesen Prozess jetzt iterieren und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx =& \frac{1}{2}\left(f(1)+f(0)\right) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)\right)\\ &+ \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wir wenden jetzt wie im Fall $k=1$ diese Formel auf $g_i(x) = f(x+i-1)$ an und erhalten nach einfachem Variablenwechsel (5.33):

$$\begin{aligned}\int_{i-1}^i f(x)\,dx =& \frac{1}{2}\left(f(i)+f(i-1)\right) + \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(i) - f^{(j-1)}(i-1)\right)\\ &+ \frac{(-1)^k}{k!}\int_{i-1}^i \widetilde{B}_k(x) f^{(k)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichung von $i=1$ nach $i=n$ summieren, dann folgt insbesondere für den zweiten Summanden:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(i) - f^{(j-1)}(i-1)\right) = \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j!} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(f^{(j-1)}(i) - f^{(j-1)}(i-1)\right)}_{\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right)}$$

und die Formel ist bewiesen. □

Bemerkung 5.45. Man kann zeigen, dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

positiven Konvergenzradius besitzt.

Sei $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Dann ist

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

Das Cauchy Produkt von $f(x)$ und $\frac{e^x-1}{x}$ ist dann:

$$1 + x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + x^2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1,$$

unter Benützung von 5.41.
Also ist
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$
Folglich:
$$\begin{aligned} f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{2}\left\{1 + \frac{2}{e^x - 1}\right\} \\ = \frac{x}{2}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) &= \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \end{aligned}$$
Also ist $g(x) = f(x) + \frac{x}{2}$ eine gerade Funktion, das heisst $g(x) = g(-x)$ und folglich ist
$$g^{(2n+1)}(0) = 0 \qquad \forall n \geq 0.$$
Insbesondere folgt
$$B_{2n+1} = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$
Anwendung 5.46. Die einfachste Anwendung der Euler-McLaurin Summationsformel ist die Berechnung von
$$1^l + 2^l + 3^l + \cdots + n^l \quad \text{wobei} \quad l \geq 1, \quad l \in \mathbb{N}.$$
Angewandt auf $f(x) = x^l$ und $k = l + 1$ folgt für alle $l \geq 1$:
$$1^l + 2^l + \cdots + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$
Die Herleitung wird dem Leser als wichtige Übung überlassen.

5.7 Stirling'sche Formel

Die Stirling'sche Formel, oder dessen geläufige Version, ist eine qualitative Aussage über das Verhalten der Fakultät:
$$n \longmapsto n!$$
Nämlich:
$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n},$$
das heisst
$$\lim_{n\to\infty} n! \Big/ \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n} = 1.$$
Für eine Approximation von $n!$ ist dies nicht so nützlich, da wir nicht wissen, wie schnell obige Folge gegen 1 konvergiert.
Mittels der Euler-McLaurin Formel werden wir jetzt folgende präzisere Aussage beweisen:

Satz 5.47.
$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$
wobei
$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1.$$

Sei $n \geq 1$ und $f(x) = \ln(x+n),\quad x \geq 0$. Wir wenden die Summationsformel (Satz 5.44(2)) auf die Summe
$$\sum_{i=1}^{m-n} f(i); \qquad k = 3$$
an wobei $m \geq n+1 \geq 2$.
In diesem Fall nimmt die Formel folgende Gestalt an:
$$\sum_{i=1}^{m-n} f(i) = \int_0^{m-n} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(f(m-n) - f(0)\right) + \frac{B_2}{2!}\left(f'(m-n) - f'(0)\right)$$
$$- \frac{B_3}{3!}\left(f^{(2)}(m-n) - f^{(2)}(0)\right) + \frac{1}{3!}\int_0^{m-n} \widetilde{B}_3(x) f^{(3)}(x)\,dx$$
Aus der Rekursionsformel 5.41 sieht man leicht, dass
$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0.$$
Aus $f(x) = \ln(x+n)$ folgt:
$$f'(x) = \frac{1}{x+n}$$
$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+n)^2}$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+n)^3}.$$
Somit folgt:
$$\frac{1}{2}\left(f(m-n) - f(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln m - \ln n\right)$$
$$\frac{B_2}{2!}\left(f'(m-n) - f'(n)\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$
$$-\frac{B_3}{3!}\left(f^{(2)}(m-n) - f^{(2)}(n)\right) = 0.$$
Wir werden jetzt $\displaystyle\int_0^{m-n} f(x)\,dx$ berechnen.
Aus Korollar 5.33(1) folgt:
$$\int_0^{m-n} \ln(x+n)\,dx = \int_n^m \ln(x)\,dx.$$

Wir berechnen jetzt eine Stammfunktion von $\ln(x)$ durch partielle Integration:

$$\int_1^x \ln(t)\,dt = \int_1^x \underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{1}_{v'(t)}\,dt$$

Wobei $v(t) = t$. Also folgt

$$\int_1^x \ln(t) \cdot 1\,dt = \ln(x) \cdot x - \ln(1) \cdot 1 - \int_1^x \frac{1}{t} t\,dt = x \ln x - x + 1.$$

Also ist $F(x) = x \ln x - x$ eine Stammfunktion von $\ln x$.
Aus Satz 5.28 folgt also

$$\int_0^{m-n} \ln(x+n)\,dx = \int_n^m \ln(x)\,dx = (m \ln m - m) - (n \ln n - n)\,.$$

Sei letztlich:

$$R_3(m,n) := \frac{1}{3!} \int_0^{m-n} \widetilde{B}_3(x) f^{(3)}(x)\,dx.$$

Wir wollen $|R_3(m,n)|$ nach oben abschätzen und zeigen, dass es mit m und n gross, klein wird. Für $f^{(3)}(x)$ haben wir einen expliziten Ausdruck und es folgt:

$$\begin{aligned}
|R_3(m,n)| &= \frac{1}{6}\left| \int_0^{m-n} \widetilde{B}_3(x) \frac{2}{(x+n)^3}\,dx \right| = \frac{1}{3}\left| \int_n^m \widetilde{B}_3(x-n) \frac{1}{x^3}\,dx \right| \\
&\leq \frac{1}{3} \int_n^m \left| \widetilde{B}_3(x-n) \right| \frac{1}{x^3}\,dx \leq \frac{1}{3} \sup_{y \geq 0} \left| \widetilde{B}_3(y) \right| \int_n^m \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= \frac{1}{6} \sup_{y \geq 0} \left| \widetilde{B}_3(y) \right| \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).
\end{aligned}$$

<u>Behauptung</u>: $\left| \widetilde{B}_3(x) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall x \geq 0\,.$

Die Funktion $\widetilde{B}_3$ war definiert als $\widetilde{B}_3(x) = B_3(x-l)$, wobei $l \leq x < l+1$, $l \in \mathbb{N}$. Für das Bernoulli Polynom

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$$

müssen wir also zeigen, dass

$$|B_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \qquad \forall x \in [0,1].$$

Sei

$$B_3'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}; \qquad B_3''(x) = 6x - 3.$$

Dann hat B_3' genau zwei Nullstellen:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \qquad \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

und beide liegen in $]0,1[$.
Nun ist

$$B_3''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$$
$$B_3''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \sqrt{3} > 0.$$

Aus Korollar 4.46 folgt, dass $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ lokale Maximalstelle und $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ lokale Minimalstelle von B_3 ist.
Die entsprechenden Werte sind:

$$B_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{36}, \qquad B_3\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{36}.$$

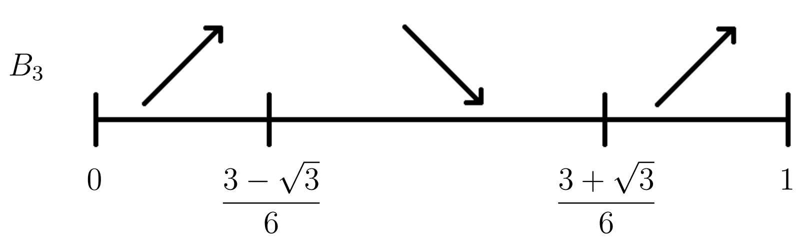
Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} B_3'(x) > 0 &\qquad \text{auf} \quad \left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right[\\ B_3'(x) < 0 &\qquad \text{auf} \quad \left]\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right[\\ B_3'(x) > 0 &\qquad \text{auf} \quad \left]\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right]. \end{aligned}$$

Also ist B_3:

$$\begin{aligned} &\text{strikt monoton wachsend auf} \quad \left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right] \\ &\text{strikt monoton fallen auf} \quad \left[\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right] \\ &\text{strikt monoton wachsend auf} \quad \left[\frac{3+\sqrt{3}}{6}, 1\right]. \end{aligned}$$

Bildlich stellen wir dies wie folgt dar:



Da ausserdem $B_3(0) = 0$, $B_3(1) = 0$ folgt, dass

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq B_3(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \qquad \forall x \in [0,1]$$

und somit
$$|B_3(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{36} \qquad \forall k \in [0,1]$$
und die Behauptung ist bewiesen.
Es folgt unmittelbar:

Lemma 5.48. $\forall m \ge n+1 \ge 1:$
$$|R_3(m,n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Wir kommen zu der Summationsformel zurück und berechnen jetzt:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-n} f(i) = \sum_{i=1}^{m-n} \ln(i+n) &= \ln(n+1) + \cdots + \ln(m) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \ln(i)\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \ln(j)\right) = \ln(m!) - \ln(n!).\end{aligned}$$

Daraus schliessen wir folgende explizite Form der Summationsformel:
$$\begin{aligned}\ln(m!) - \ln(n!) =&(m\ln m - m) - (n\ln n - n) + \frac{1}{2}(\ln m - \ln n) \\ &+ \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + R_3(m,n).\end{aligned}$$

Sei nun
$$\gamma_n := \ln(n!) - (n\ln n - n) - \frac{1}{2}\ln n.$$

Dann folgt
$$\gamma_m - \gamma_n = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + R_3(m,n). \tag{$*$}$$

Mit Lemma 5.48 folgt insbesondere:
$$|\gamma_m - \gamma_n| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)$$
woraus folgt, dass $(\gamma_m)_{m\ge 1}$ eine Cauchy Folge bildet. Sei
$$\gamma := \lim_{m\to\infty} \gamma_m$$
deren Grenzwert. Aus $(*)$ folgt, dass
$$\lim_{m\to\infty} R_3(m,n) =: -R_3(n)$$
existiert. Wir erhalten somit:
$$\gamma - \gamma_n = -\frac{1}{12n} - R_3(n)$$

oder

$$\gamma_n = \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n),$$

das heisst

$$\ln(n!) - (n \ln n - n) - \frac{1}{2} \ln n = \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)$$
$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)$$

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \exp\left(\gamma + \frac{1}{12n} + R_3(n)\right) = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} e^\gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right).$$

Wir müssen zuletzt noch e^γ bestimmen. Die Idee ist:

$$e^\gamma = \frac{e^\gamma \cdot e^\gamma}{e^\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\gamma_n} \cdot e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}}.$$

Da nach Definition von γ_n:

$$e^{\gamma_n} = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

folgt:

$$\frac{e^{\gamma_n} \cdot e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}} = \frac{n!\, n!\, e^{2n}}{n^{2n} \cdot n} \cdot \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!\, e^{2n}} = \frac{(2^n \cdot n!)\,(2^n \cdot n!)}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}}$$
$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Dann folgt:

$$\left(\frac{e^{\gamma_n} \cdot e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}}\right)^2 = \underbrace{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)}}_{\longrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ (Wallis)}} \cdot \underbrace{\frac{2(2n+1)}{n}}_{\longrightarrow 4}$$

woraus

$$(e^\gamma)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\gamma_n} e^{\gamma_n}}{e^{\gamma_{2n}}}\right)^2 = 2\pi$$

und somit $e^\gamma = \sqrt{2\pi}$ folgt.

5.8 Uneigentliche Integrale

Der Begriff des Riemann Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ setzt voraus, dass $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt ist. Unter gewissen Voraussetzungen kann man diese Einschränkungen umgehen.

Definition 5.49. *Sei* $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt und integrierbar auf* $[a, b]$ *für alle* $b > a$. *Falls*

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

und sagen, dass f *auf* $[a, +\infty[$ *integrierbar ist.*

Hier sind zwei wichtige Beispiele:

Beispiel 5.50.

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$

2. $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \ln b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} & \text{sonst.} \end{cases}$

   Somit: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \text{divergiert,} & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1. \end{cases}$

Es ist meistens so, dass wir keine explizite Stammfunktion für f angeben können. Darum brauchen wir Kriterien, um Integrabilität auf $[a, \infty[$ nachzuweisen.

Lemma 5.51. Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ $\forall b > a$.

1. Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.

2. Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\, dx$ divergiert, so divergiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$.

Beweis. (1): Da für alle $t_2 > t_1 > a$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{t_1}^{t_2} g(x)\, dx,$$

folgt die Aussage aus dem Cauchy Kriterium.
(2): Ist klar. □

Beispiel 5.52. Sei $\alpha > 0$: Wir untersuchen, wann

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^\alpha}\, dx$$

existiert. Sei $b > 1$:

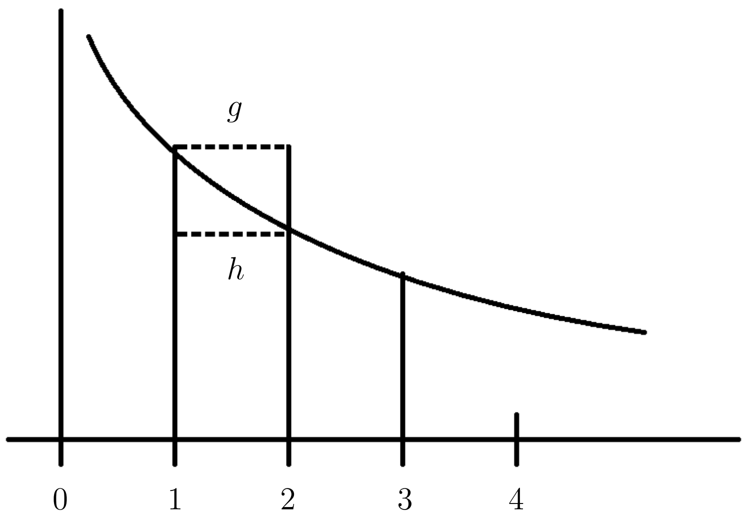
$$\int_0^b \frac{1}{1 + x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^\alpha}\, dx + \int_1^b \frac{1}{1 + x^\alpha}\, dx$$

Nun ist
$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x \geq 1,$$
woraus folgt, dass $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$ für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert (siehe Lemma 5.51, Beispiel 5.50(2)).
Somit konvergiert $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx$ für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

Folgender Test für Reihenkonvergenz ist sehr nützlich:

Satz 5.53 (McLaurin 1742)**.** *Sei* $f : [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ *monoton fallend. Die Reihe*
$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$
konvergiert genau dann, wenn
$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$
konvergiert.

Beweis. Sei $g(x) := f(\lfloor x \rfloor)$, $h(x) := f(\lceil x \rceil)$.



Dann folgt $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq 1$. Aus der Monotonie des Integrals folgt:
$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N h(x)\,dx \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \int_1^N g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$
Der Satz folgt dann aus dem Satz von Weierstrass über monoton wachsende Folgen. $\square$

Beispiel 5.54. Aus McLaurin und Beispiel 5.50(2) folgt für $\alpha > 1$:
$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\frac{1}{\alpha-1}} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

Also

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Beispiel 5.55. Sei $\beta > 0$, wann konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\beta}} \ ?$$

Nach McLaurin konvergiert diese Reihe genau dann, wenn

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln x)^{\beta}}\, dx$$

konvergiert.
Sei also $b > 2$: Wir setzen $x = e^u$, wobei $u \in [\ln 2, \ln b]$. Dann folgt

$$\int_2^{b} \frac{1}{x\,(\ln x)^{\beta}}\, dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{e^u u^{\beta}} \cdot e^u\, du = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{u^{\beta}}\, du.$$

Aus Beispiel 5.50(2) folgt, dass

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\,(\ln x)^{\beta}}\, dx \quad \text{und somit} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\beta}}$$

genau dann konvergiert, falls $\beta > 1$.

Eine Situation die zu einem uneigentlichen Integral führt ist, falls

$$f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem Intervall $[a+\epsilon, b]$, $\epsilon > 0$, beschränkt und integrabel ist aber nicht notwendigerweise beschränkt auf $]a, b]$.

Definition 5.56. *In dieser Situation ist* $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar, falls*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx$$

existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\, dx$ *bezeichnet.*

Beispiel 5.57. Sei wieder $\frac{1}{x^{\alpha}}$ für $x \in]0, 1]$.
Dann folgt für $\epsilon > 0$:

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} -\ln \epsilon, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Falls $1-\alpha > 0$ folgt $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{1-\alpha} = 0$ und falls $1-\alpha < 0$ divergiert $\epsilon^{1-\alpha}$ für $\epsilon \to 0^+$.
Folglich:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \begin{cases} \text{divergiert}, & \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Übung 5.58. Formuliere und beweise ein zu Lemma 5.51 analoges Lemma für ein uneigentliches Integral wie in Definition 5.56.

Die Gamma Funktion

Die Gamma Funktion wurde von Euler definiert; sie ist auf $]0,\infty[$ definiert und "interpoliert" die Funktion $n \mapsto (n-1)!$.

Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$: Wir betrachten für $b > 0$ und $n \geq 1$:

$$\int_0^b \underbrace{x^n}_{f(x)} \underbrace{e^{-x}}_{g'(x)} \, dx = -b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

Nun ist

$$\lim_{b \to +\infty} b^n e^{-b} = 0$$

woraus folgt, dass $x^n e^{-x}$ auf $[0,\infty[$ integrierbar ist und

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

und folglich

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n(n-1)\cdots 1 \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} \, dx}_{1}.$$

Folglich:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition 5.59. *Für $s > 0$ definieren wir*

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx.$$

Dieses Integral setzt sich im Allgemeinen aus zwei uneigentlichen Integralen zusammen:

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \, dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx.$$

Aus $e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1} \quad \forall x \in]0,1]$ und Beispiel 5.57 folgt, dass

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \, dx$$

für $s > 0$ konvergiert.
Zum zweiten Integral: sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es M so dass:

$$x^{s-1} \leq M \cdot e^{\frac{x}{2}} \qquad \forall x \geq 1$$

woraus folgt

$$e^{-x}x^{s-1} \leq Me^{-\frac{x}{2}}.$$

Da $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ konvergiert, folgt aus Lemma 5.51(1), dass

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Es folgt, dass

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

für alle $s > 0$ konvergiert.

Satz 5.60 (Bohr-Mollerup)**.**

1. *Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen*
   - *(a)* $\Gamma(1) = 1$
   - *(b)* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
   - *(c)* Γ *ist logarithmisch konvex, das heisst*

     $$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda\,\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

     für alle $x, y > 0$ *und* $0 \leq \lambda \leq 1$.
2. *Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion* $]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$ *die (a), (b) und (c) erfüllt.*
   Darüber hinaus gilt:

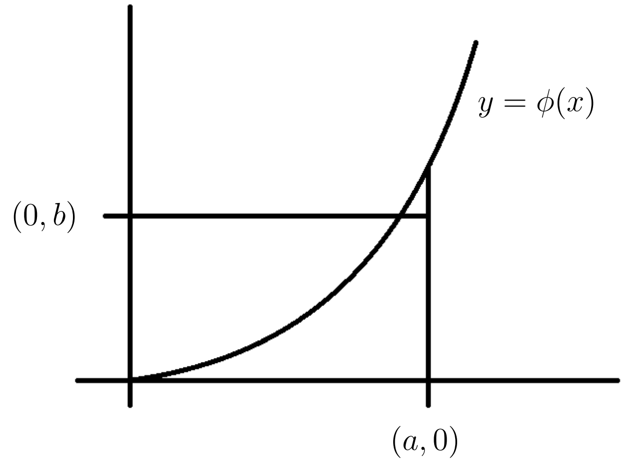
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad \forall x > 0.$$

Als Vorbereitung leiten wir jetzt Ungleichungen her, die von allgemeinem Interesse sind.

Zunächst die Young'sche Ungleichung.
Sei $\phi : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ eine stetige strikt monoton wachsende Bijektion mit $\phi(0) = 0$. Seien $a, b \geq 0$. Dann ist offensichtlich der Flächeninhalt $a \cdot b$ des Rechteckes mit Ecken $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$ kleiner (oder gleich)

$$\int_0^a \phi(x)\,dx + \int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy$$

wobei $\phi^{-1} : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ die zu ϕ inverse Funktion bezeichnet.



Lemma 5.61. Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann gilt $\forall a, b \geq 0$:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Wende die Young'sche Ungleichung an auf $\phi(x) = x^{p-1}$. Dann ist

$$\phi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$$

und

$$\int_0^a \phi(x)\, dx = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b \phi^{-1}(y)\, dy = \frac{b^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

□

Sei jetzt $a < b$; sei $p > 1$. Für $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann folgt aus Übung 11.3, dass

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0.$$

Satz 5.62 (Hölder Ungleichung)**.** *Seien* $p > 1$ *und* $q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Für alle $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig gilt:*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $f \neq 0$ und $g \neq 0$, woraus (siehe oben) $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ folgt.
Die Young'sche Ungleichung angewandt auf

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \qquad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

ergibt:

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

Monotonie des Integrals impliziert:

$$\int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \, dx + \frac{1}{q} \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \, dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Beweis von Satz 5.60.
(1):
(a): $\quad \Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1 \quad$ (siehe oben).
(b): Sei $s > 0$ und $b > 0$:

$$\int_0^b e^{-x} x^{s+1} \frac{1}{x} \, dx = \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{x^s}_{g(x)} \, dx = -e^{-b} b^s + \int_0^b e^{-x} s x^{s-1} \, dx$$

Da $\lim\limits_{b \to \infty} e^{-b} b^s = 0$ folgt

$$\Gamma(s+1) = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x} x^{s+1} \frac{1}{x} \, dx = s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx = s\Gamma(s).$$

(c): Sei $0 < \lambda < 1$,

$$p = \frac{1}{\lambda}, \quad q = \frac{1}{1-\lambda}, \quad f(t) = t^{\lambda(x-1)} e^{-\lambda t}, \quad g(t) = t^{(1-\lambda)(y-1)} e^{-(1-\lambda)t}.$$

Dann folgt aus der Hölder Ungleichung angewandt auf $f, g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty[$ wobei $0 < a < b$:

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{\lambda x + (1-\lambda)y} e^{-t} \frac{1}{t} \, dt &= \int_a^b f(t) g(t) \, dt \leq \left(\int_a^b f(t)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(t)^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \, dt \right)^\lambda \left(\int_a^b t^{y-1} e^{-t} \, dt \right)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Mit $a \to 0^+$ und $b \to +\infty$ folgt

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \Gamma(x)^\lambda \, \Gamma(y)^{1-\lambda}.$$

(2): Wir nehmen an, dass

$$F :]0,\infty[\longrightarrow]0,\infty[$$

die Eigenschaften (a), (b), (c) erfüllt.
Aus (b) und vollständiger Induktion ergibt sich für alle $x > 0$ und $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x+n) &= (x+n-1)F(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)F(x+n-2) \\ &= (x+n-1)\cdots xF(x). \end{aligned}$$

Mit $x = 1$ folgt aus (a):

$$F(n+1) = n!.$$

Sei nun $0 < x \leq 1$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt dann unter Benützung von (c):

$$\begin{aligned} F(n+x) &= F\left(x(n+1) + (1-x)n\right) \\ &\leq F\left(n+1\right)^x F\left(n\right)^{1-x} \\ &= (n!)^x \left((n-1)!\right)^{1-x} = n!\, n^{x-1} \end{aligned} \tag{$*$}$$

und

$$\begin{aligned} n! = F(n+1) &= F\left(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)\right) \\ &\leq F\left(n+x\right)^x F\left(n+1+x\right)^{1-x} \\ &= F\left(n+x\right)^x \left(n+x\right)^{1-x} F\left(n+x\right)^{1-x} \\ &= F(n+x)\left(n+x\right)^{1-x}. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt:

$$\frac{n!\,(n+x)^x}{(n+x)} \leq F(n+x) \leq \frac{n!\,n^x}{n}.$$

Mit $F(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)F(x)$ folgt:

$$\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{n+x}{n}\right)^x \leq F(x) \leq \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{n+x}{n}\right)$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty}$ folgt für $0 < x \leq 1$:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Gleichung für alle $x > 0$ gilt: sei $n \geq 1$, wir nehmen an sie gilt $\forall x \in]n-1,n]$. Dann folgt für $n-1 < x \leq n$:

$$\begin{aligned} F(x+1) = x\,F(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+1)\cdots(x+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}\left(\frac{x+n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+1+n)}. \end{aligned}$$

Also ist F eindeutig durch (a), (b), (c) bestimmt, woraus $F = \Gamma$ folgt. $\square$

5.9 Das unbestimmte Integral

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f (siehe Satz 5.26); wir schreiben in diesem Fall:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte Integral ist die Umkehroperation zur Ableitung. Die Integrationskonstante deutet an, dass wir jede andere Stammfunktion erhalten können, indem wir zu einer bekannten Stammfunktion eine beliebige Konstante addieren.

Mit dieser Notation lässt sich die Berechnung vieler Ableitungen wie folgt ausdrücken:

- $\displaystyle\int x^s\,dx = \begin{cases} \frac{x^{s+1}}{s+1} + C & s \neq -1 \\ \ln x + C & (x > 0) \end{cases}$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
- $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \mathrm{arsinh} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{arcosh} x + C.$

Die Formel für $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ führt dann zu:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g. \qquad \text{(Partielle Integration)}$$

Die Formel für $(F \circ \phi)'(u) = F'(\phi(u))\,\phi'(u)$ führt zu folgender Integrationstechnik:
Sei $F(x) = \int f(x)\,dx$, dann ist mit $x = \phi(u)$,

$$F \circ \phi(u) = \int f(\phi(u))\,\phi'(u)\,du.$$

Mit anderen Worten: um das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,dx$$

zu berechnen, tätigen wir eine Substitution

$$x = \phi(u)$$

und ersetzen im Integral

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\phi(u)) \\ dx &= \phi'(u)\,du. \end{aligned}$$

Beispiel 5.63.

1. $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\, dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x.$$

2. $$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\ln x}_{f(x)}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

3. $$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)}\, dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx,$$
   $$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\, dx = x\cdot\sin x - \int sinx\, dx = x\cdot\sin x + \cos x.$$
   Also ist:
   $$\int x^2\sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x.$$

4. $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\, dx, \qquad n \geq 1\,.$

   Sei $f'(x) = \sin x$ und $g(x) = \sin^{n-1} x\,.$ Partielle Integration liefert:
   $$\begin{aligned} I_n &= \int \sin x\cdot\sin^{n-1} x\, dx = -\cos x\sin^{n-1} x + \int \cos x(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\, dx \\ &= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x\sin^{n-2} x\, dx. \end{aligned}$$
   Mit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ erhalten wir:
   $$\begin{aligned} I_n &= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \sin^n x\, dx \\ &= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$
   Somit:
   $$I_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
   Falls n gerade ist, reduziert es sich auf den Fall $I_0 = \int\, dx = x$ und falls n ungerade ist, reduziert es sich auf den Fall $I_1 = \int \sin x\, dx = -\cos x\,.$

5. $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx\,.$

   Sei $f'(x) = 1,\quad g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}\,.$
   $$J_n = \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + n\int \frac{2x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx$$

Sei $2x^2 = 2(1+x^2) - 2$. Dann ist

$$\int \frac{2x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx - \int \frac{2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx.$$

Also:

$$J_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,J_n - 2n\,J_{n+1}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) J_n.$$

Dann reduziert sich die Berechnung von J_n auf

$$J_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x).$$

Beispiel 5.64.

1. Gesucht ist $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, wir substituieren $x = a \cdot u, \quad dx = a\,du$ und erhalten:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1+u^2)} \cdot a\,du = \frac{1}{a}\arctan u = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

2. Gesucht ist $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$, wir substituieren: $x = r\sin\theta, \quad dx = r\cos\theta\,d\theta$,

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2\left(1-\sin^2\theta\right)}\;r\;\cos\theta\,d\theta = r^2\int \cos^2\theta\,d\theta.$$

Nun kann man hier die Verdoppelungsregel benützen:

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta \quad \text{oder} \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}.$$

Also:

$$r^2\int \cos^2\theta\,d\theta = r^2\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta = \frac{r^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right).$$

Dann ist $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$ und

$$\frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta = \frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} = \frac{x}{r^2}\sqrt{r^2-x^2}.$$

Also:

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$, substituiere $x = a\cdot\tan\theta,\quad dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$. Also:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{a^3\left(1+\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta.$$

Aus $\dfrac{x}{a} = \tan\theta$ folgt

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\frac{x^2}{a^2}.$$

Also:

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)} = \frac{x}{a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

4. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ mit $x = \cosh t,\quad x^2-1 = \cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t,\quad dx = \sinh t\,dt$.

Also:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2 t\,dt.$$

Durch partielle Integration:

$$\int \underbrace{\sinh t}_{f'(t)}\cdot\underbrace{\sinh t}_{g(t)}\,dt = \cosh t\sinh t - \int \cosh^2 t\,dt$$
$$= \cosh t\sinh t - \int \left(\sinh^2 t + 1\right)\,dt$$

Also:

$$\int \sinh^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(\cosh t\sinh t - t\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh} x}{2}.$$

Stammfunktionen von rationalen Funktionen

Sei

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

eine rationale Funktion. Dann lässt sich $\int R(x)\,dx$ als elementare Funktion darstellen, das heisst als Funktion von Polynomen, rationalen, exponentiellen, logarithmischen, trigonometrischen und inversen trigonometrischen Funktionen. Wir verzichten hier auf eine präzise Definition, und zeigen wie die Rechnung im Prinzip ausgeführt wird. Sie besteht aus drei Schritten:

- Reduktion auf den Fall wo $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$.
- Zerlegung von Q in lineare und quadratische Faktoren sowie Partialbruchzerlegung von R.
- Integration der Partialbrüche.

<u>Erster Schritt:</u> Sei $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Falls $\operatorname{grad}(P) \geq \operatorname{grad}(Q)$ wenden wir den euklidischen Algorithmus an:

$$P(x) = S(x)Q(x) + \hat{P}(x),$$

wobei $\operatorname{grad}(\hat{P}) < \operatorname{grad}(Q)$. Dann ist

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{\hat{P}(x)}{Q(x)}$$

und eine Stammfunktion von $S(x)$ lässt sich leicht finden.

<u>Zweiter Schritt:</u> $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ wobei $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$.
Wir können annehmen, dass

$$Q(x) = x^n + \cdots,$$

wobei $n = \operatorname{grad}(Q)$.
Seien $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$ sowie $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ die paarweise verschiedenen Wurzeln (Nullstellen) von Q, wobei $\alpha_j,\ \beta_j, \gamma_j$ reell und : $\beta_j \neq 0$. Dann lässt sich Q in ein Produkt zerlegen:

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i} \tag{$*$}$$

Satz 5.65. *Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$ und Q mit Produktzerlegung $(*)$. Dann gibt es A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} reelle Zahlen mit*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}.$$

Der Algorithmus geht wie folgt: sei

$$Q_1(x) = (x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2, \qquad Q(x) = Q_1(x)^{m_1} q(x).$$

Behauptung: es gibt A, B und ein Polynom p mit $\operatorname{grad}(p) \leq \operatorname{grad}(Q) - 1$ und:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A + B\,x}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{p(x)}{Q_1(x)^{m_1-1}\,q(x)}.$$

Wir suchen also eine Lösung von

$$P(x) = (A + B\,x)q(x) + p(x)Q_1(x).$$

Nun ist

$$Q_1\left(\alpha_1 \pm i\beta_1\right) = 0, \qquad q\left(\alpha_1 \pm i\beta_1\right) \neq 0.$$

Wir erhalten zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} P\left(\alpha_1 + i\beta_1\right) &= \left(A + B\left(\alpha_1 + i\beta_1\right)\right) q\left(\alpha_1 + i\beta_1\right) \\ P\left(\alpha_1 - i\beta_1\right) &= \left(A + B\left(\alpha_1 - i\beta_1\right)\right) q\left(\alpha_1 - i\beta_1\right). \end{aligned}$$

Dieses System hat eine eindeutige Lösung in den Unbekannten A, B, da die Determinante des Systems

$$\begin{aligned} A + B\left(\alpha_1 + i\beta_1\right) &= \frac{P\left(\alpha_1 + i\beta_1\right)}{q\left(\alpha_1 + i\beta_1\right)} \\ A + B\left(\alpha_1 - i\beta_1\right) &= \frac{P\left(\alpha_1 - i\beta_1\right)}{q\left(\alpha_1 - i\beta_1\right)} \end{aligned}$$

gleich

$$-2i\beta_1 \neq 0$$

ist. Dies bestimmt eindeutig A und B. Nun folgt aber, dass $\alpha_1 + i\beta_1$ und $\alpha_1 - i\beta_1$ Wurzeln von

$$P(x) - (A + B\,x)\,q(x)$$

sind. Somit ist es durch $Q_1(x)$ teilbar und dies bestimmt $p(x)$ eindeutig.

Der Algorithmus fährt dann induktiv mit $\dfrac{P(x)}{Q_1(x)^{m_1-1}\,q(x)}$ fort.

<u>Dritter Schritt:</u> Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\left(x - \gamma_i\right)^j}$$

ist $\ln\left(x - \gamma_i\right)$ falls $j = 1$ und $\dfrac{-1}{(j-1)\left(x - \gamma_i\right)^{j-1}}$ für $j \geq 2$.

Den allgemeinen Partialbruch $\dfrac{A + B\,x}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^j}$ zerlegen wir wie folgt:

$$\frac{B(x-\alpha)}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^j} + \frac{A + B\,\alpha}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^j}$$

Der erste Summand ist offensichtlich die Ableitung von

$$\begin{array}{ll} \frac{B}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) & \text{falls} \quad j=1 \\ \frac{B}{2(1-j)}\frac{1}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{j-1}}, & \quad j\geq 2. \end{array}$$

Was den zweiten Summanden angeht:

$$\int \frac{(A+B\,\alpha)}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^j}\,dx: \quad \text{Substituiere } \; x-\alpha=\beta\cdot t, \;\; dx=\beta\,dt$$

Also:

$$\int \frac{(A+B\,\alpha)}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^j}\,dx = \int \frac{(A+B\,\alpha)}{\beta^{2j}\,(t^2+1)^j}\beta\,dt = \frac{(A+B\,\alpha)}{\beta^{2j-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,dt.$$

Letzeres Integral haben wir bereits in Beispiel 5.63(5) behandelt.

Stammfunktionen von $R\left(e^{\lambda x}\right)$

Hier ist R eine rationale Funktion. Durch die Substitution

$$u=e^{\lambda x}, \quad du=\lambda e^{\lambda x}\,dx$$

erhalten wir $dx=\dfrac{du}{\lambda u}$ und somit

$$\int R\left(e^{\lambda x}\right)\,dx = \int \frac{R(u)}{\lambda u}\,du.$$

Da $\frac{R(u)}{\lambda u}$ wieder eine rationale Funktion ist, haben wir das Problem auf die Berechnung von Stammfunktionen von rationalen Funktionen zurückgeführt.
Zum Beispiel:

$$\int \frac{1}{3+\cosh x}\,dx, \quad \text{mit} \quad u=e^x, \;\; du=e^x\,dx$$

$$\int \frac{1}{3+\cosh x}\,dx = \int \frac{1}{3+\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)}\frac{1}{u}\,du = \int \frac{2}{u^2+6u+1}\,du$$

Nun ist $u^2+6\,u+1=(u-\lambda_1)\,(u-\lambda_2)$, wobei

$$\lambda_1=-3+2\sqrt{2}, \quad \lambda_2=-3-2\sqrt{2}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{u^2+6u+1}$ ist

$$\frac{1}{u^2+6u+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u+3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{u+3+2\sqrt{2}}\right).$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{u^2+6u+1}\,du &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(u+3-2\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(u+3+2\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{e^x+3-2\sqrt{2}}{e^x+3+2\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Stammfunktionen von $R(\sin x, \cos x)$

R ist jetzt eine rationale Funktion in zwei Variablen.
Sei $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$. Dann ist

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 = \frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}.$$

Also $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$. Aus $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ folgt:

$$\cos x \, dx = \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \, du \implies dx = \frac{2}{(1+u^2)} \, du.$$

Also:

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{(1+u^2)} \, du.$$

Jetzt ist

$$\frac{2}{(1+u^2)} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)$$

eine rationale Funktion von u.

Stammfunktionen von $R\left(\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}, x\right)$

Wir behandeln hier den Fall $a > 0$. Sei $x = \alpha u + \beta$, wobei wir α, β jetzt bestimmen:

$$ax^2 + bx + c = a\alpha^2 u^2 + \alpha(2a\beta + b)u + (a\beta^2 + b\beta + c)$$

Setze

$$\beta = -\frac{b}{2a},$$

dann:

$$ax^2 + bx + c = a\alpha^2 u^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Falls $b^2 - 4ac > 0$ definieren wir α durch:

$$\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

und erhalten:

$$ax^2 + bx + c = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)\left(u^2 - 1\right).$$

Somit folgt:

$$R\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}, x\right) = \widetilde{R}\left(\sqrt{u^2 - 1}, u\right),$$

wobei $\widetilde{R}$ wieder eine rationale Funktion ist.
Mit $u = \cosh t, \quad du = \sinh t \, dt$ erhalten wir

$$\int \widetilde{R}\left(\sqrt{u^2-1}, u\right) \, du = \int \widetilde{R}(\sinh t, \cosh t) \sinh t \, dt.$$

Wir bemerken jetzt, dass

$$\widetilde{R}(\sinh t, \cosh t) \sinh t$$

eine rationale Funktion von e^t ist. Damit haben wir das Problem auf einen bereits behandelten Fall zurückgeführt.

Falls $b^2 - 4ac < 0$, dann

$$ax^2 + bx + c = a\alpha^2 u^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Mit

$$\alpha = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

folgt

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a}(u^2 + 1).$$

Die Substitution $u = \sinh t, \quad du = \cosh t \ dt$ führt dann wieder auf ein Integral einer rationalen Funktion von e^t.

A Der Binomialsatz

Sei für jede natürliche Zahl $n \geq 1$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Man erweitert die Definition auf $n = 0$ mit der Konvention

$$0! = 1.$$

Bekanntlich ist $n!$ die Kardinalität der Menge der Bijektionen

$$\phi : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Solche Bijektionen werden auch Permutationen genannt.
Sei jetzt $1 \leq k \leq n$; wir berechnen jetzt die Kardinalität der Menge

$$\mathcal{P}_k(n) := \{A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\} : \operatorname{card} A = k\}.$$

Sei

$$I_k(n) = \{\sigma : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\} : \sigma \text{ injektiv}\}.$$

Zunächst bemerken wir, dass

$$\operatorname{card} I_k(n) = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} I_k(n) &\longrightarrow \mathcal{P}_k(n) \\ \sigma &\longmapsto \sigma(\{1, 2, \ldots, k\}) \end{aligned}$$

die per Definition surjektiv ist. Jetzt bemerken wir noch, dass falls $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ eine Teilmenge der Kardinalität k bezeichnet, dann gibt es $k!$ Bijektionen

$$\{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow A.$$

Folglich erhalten wir:

$$\operatorname{card} \mathcal{P}_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Letzterer Ausdruck wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet. Wir erweitern zudem die Definition von $\binom{n}{k}$ auf

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq 0.$$

Satz A.1 (Binomialsatz)**.** $\forall x, y \in \mathbb{C},\ n \geq 1$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Aus dem Distributivgesetz folgt:

$$\begin{aligned}\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ Mal}} &= \sum_{A\in\mathcal{P}(\{1,2,3,\ldots,n\})} x^{\operatorname{card} A} y^{n-\operatorname{card} A} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \underbrace{\sum_{\operatorname{card} A = k} \cdot 1}_{\operatorname{card} \mathcal{P}_k(n) = \binom{n}{k}} .\end{aligned}$$

$\square$

Literatur

- E.Hairer, G.Wanner, "Analysis by its History", Springer 1996
  https://archive-ouverte.unige.ch/unige:12341
- M.Einsiedler, P.Jossen, A.Wieser, "Analysis I und II"
  https://people.math.ethz.ch/~einsiedl/Analysis-Skript.pdf
- M.Struwe, "Analysis fuer Informatik"
  https://people.math.ethz.ch/~struwe/Skripten/InfAnalysis-bbm-8-11-2010.pdf
- D. Salamon, "Das Riemannsche Integral"
  https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/ana1-int.pdf