Özlem Imamoglu.

Übungsorganisator: Ana Žegarac

Website: https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0212-16L/

Übungen sind ein sehr wichtiger Teil der Vorlesung

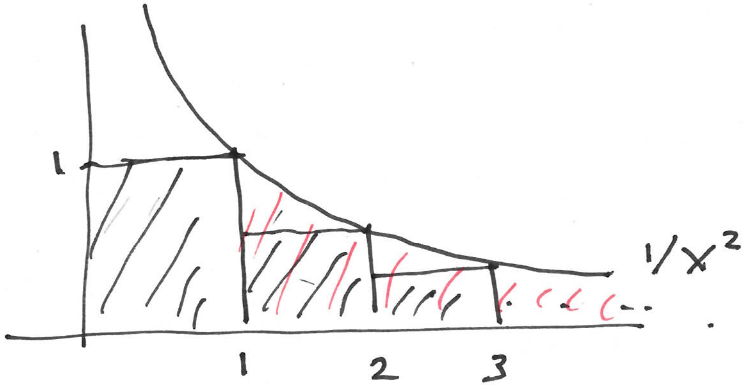
Es gibt eine starke Korrelation zwischen

(den studenten, welche die Übungen lösen) und (derjenigen, welche die Prüfung bestehen.)

Bsp.

Was ist die Summe

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$



Man kann mit Analysis I sehr einfach die Fläche unter dem Graph von $1/x^2$, von 1 bis ∞ rechnen.

Sie ist 1!

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \dots \geq 1$$

$$1 + 1 \geq S.$$

$$1 \leq S \leq 2.$$

Euler $S = \frac{\pi^2}{6}$.

§I. Reelle Zahlen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$

$0 = x + 1$ ist in $\mathbb{N}$ nicht lösbar

$\mathbb{Z} = \{\ldots -1, 0, 1, \ldots\}$

$0 = 2x + 3$ ist in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

$x^2 - 2 = 0$

ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist mit 2 Operationen versehen.

Addition $+ :$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x + y$

Multiplikation $\cdot :$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x \cdot y$.

$\mathbb{R}$ ist mit zwei Operationen versehen:

Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x + y$

Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x \cdot y$

Axiome der Addition

A1 Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$

A2 Neutrales Element: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

A3 Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

A4. Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

* In A3 ist y eindeutig bestimmt und mit $-x$ bezeichnet

Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) z = x \cdot (y z)$

M2 Neut. Element: $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot 1 = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

M3 Inv. Element: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

M4. Komm.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

* In M3 ist y eindeutig bestimmt und mit x^{-1} bezeichnet.

D: Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

$(\mathbb{R}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe

$(\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Abel. Gruppe.

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungrelation: $\leq$

Ordnungsaxiome

O1) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

O2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O3) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O4) Total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K2) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ (i.e $x \geq 0$) und $\forall y \geq 0: \quad x \cdot y \geq 0.$

Bmk. $\mathbb{Q}$ bildet auch einen angeordneten Körper.

Was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet ist

Ordnungsvollständigkeit (V)

Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$ so dass

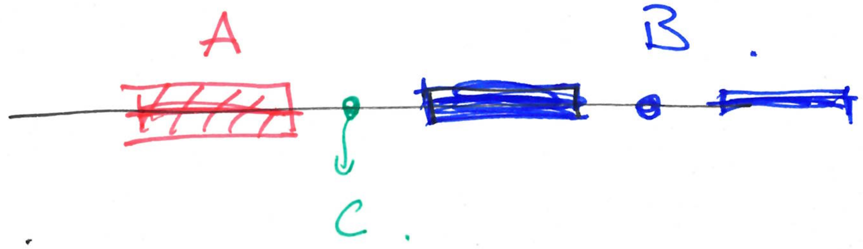
(vi) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(vii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$

Dann gibt es (mindestens) ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$\forall a \in A$ $a \leq c$ und $\forall b \in b$ $c \leq b$.

Bsp.



Satz. $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der Ordnung vollständig ist.

Notation: $a > b$ bezeichnet $a \geq b$ und $a \neq b$.

Folgerungen der Axiome.

Kor 1.1.6.

1) Die Additiven und $-$ Multiplikativen Inverse sind eindeutig bestimmt.

2) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) $-1 \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Insbesondere $(-1)^2 = 1$.

4) $y \geq 0 \iff (-y) \leq 0$

5) $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
Insbesondere $1 = 1^2 \geq 0$.

6) $x \leq y$ und $u \leq v$
$\Longrightarrow x+u \leq y+v$

7) $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v$
$\Longrightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$.

Beweis: 1)

Eindeutigkeit der Add. Inverse.

Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben, mit y und z zwei Add. Inversen von x. ~~sind~~.

d.h. $x+y=0 \quad (**)$
$x+z=0. \quad (*)$

zu zeigen: $y = z$

$$y \overset{A2}{=} y+0 \overset{(*)}{=} y+(x+z) \overset{A1}{=} (y+x)+z \overset{(**)}{=} 0+z = z$$

Beweis von 3).

$$x + (-1)\cdot x \underset{\text{MZ.}}{=} 1\cdot x + (-1)\cdot x$$

$$\underset{\text{D.}}{=} (1+(-1))\cdot x \underset{2)}{=} 0\cdot x = 0.$$

$\Rightarrow x + (-1)\cdot x = 0$

$\Rightarrow (-1)\cdot x$ ist die Add. inverse von x.

$\Rightarrow (-1)\cdot x = -x$ da Add. inv. eindeutig bestimmt ist.

Eine wichtige Folgerung von Vollständigkeit.

Kor 1.1.7 (Archimedisches Prinzip).

1) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$y \leq nx$$

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \leq x < n+1$$

Beweis: Übung.

Für 1) siehe skript von
M. Burger
S. 6, Kor 1.1.7.

Für 2) siehe skript von
Einsiedler, Jossen
Satz 2.68.

Folgerung des (V)

Es gibt $c \in \mathbb{R}$, mit
$c^2 = 2$.

Beweis $A := \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 2, \; a^2 \leq 2\}$

$B := \{b \in \mathbb{R} \mid 1 \leq b \leq 2, \; b^2 \geq 2\}$.

Dann gelten

① (i) $1 \in A$, $A \neq \emptyset$

(ii) $2 \in B$, $B \neq \emptyset$

② $\forall a \in A, \; b \in B, \; a \leq b$

Beweis ② Falls $a \gneq b$

$\Rightarrow a \cdot a \gneq b \cdot b$ (Kor 1.1.~~6~~, 7)

$\Rightarrow a^2 \gneq b^2 \geq 2$. ↯ ($a^2 \leq 2$).

① und ② sind die Annahme von (V).

Nach (V) es gibt $c \in \mathbb{R}$

mit $a \leq c \quad \forall a \in A$

$c \leq b \quad \forall b \in B$.

Insbesondere. $1 \leq c \leq 2$.

Wir zeigen nun dass $c^2 = 2$.

Andernfalls

entweder

I) $c^2 < 2$ oder II) $c^2 > 2$

Im Fall I): da $c^2 < 2$ ist, $c \in A$. (Wir nehmen an dass $c^2 \neq 2$).

$2 - c^2 > 0$ und $2c+1 > 1 > 0$

Nach Arch. Prinzip:

es gibt $\mathbb{N} \ni n \geq 1$

mit $\boxed{2c+1 \leq n(2-c^2)}$ (*)

Mit dieser Wahl von n.

$$\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + 2c\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

(Da $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$)

$$\leq c^2 + 2c \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$$= c^2 + \frac{1}{n}(2c+1)$$

$$\overset{(*)}{\leq} c^2 + 2 - c^2 = 2$$

d.h. $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$

d.h. $c + \frac{1}{n} \in A$.

Aber $a \leq c \quad \forall a \in A$

Insbesondere $c + \frac{1}{n} \leq c$ ↯

II) $c^2 > 2$ analog. $\Rightarrow \boxed{c^2 = 2}$.

Satz 1.1.8. Für jedes $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Bmk. Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen das Vollständigkeitsaxiom NICHT!

Denn,

$$A := \left\{ a \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq a \leq 2 \\ a^2 \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$B := \left\{ b \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq b \leq 2 \\ b^2 \geq 2 \end{array} \right\}$$

Wenn die zahl $c \in \mathbb{Q}$ existiert wie oben so dass $\forall a \in A \quad a \leq c$
$\forall b \in B \quad c \leq b$

würde es auch $c^2 = 2$ erfüllen.

Aber wissen wir schon dass keine rationale Zahl $c \in \mathbb{Q}$ existiert so dass $c^2 = 2$.

Defn. Seien $x, y \in \mathbb{R}$

(i) $\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x, y\} := \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y \end{cases}$

(iii) Der **Absolutbetrag** einer Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$
$$= \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 1.1.10.

1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|xy| = |x||y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

3) $|x+y| \leq |x| + |y|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}.$

Dreiecksungleichung

4) $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}.$

$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|}$$

Satz 1.1.11. (Youngsche Ungleichung).

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2.$$

Beweis $\left(\sqrt{\varepsilon}|x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|y|\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \varepsilon |x|^2 - 2|x||y| + \frac{1}{\varepsilon}|y|^2 \geq 0$$

Da $|x|^2 = x^2$, $|y|^2 = y^2$ ist, ist der Satz bewiesen.

Notation.

Wir führen noch 2 Symbole ein $-\infty$, und ∞ mit der Konvention

$$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ein Interval ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form

1) Für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$.

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a, b)$

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$]a, b] :=$

2) $a \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$[a, \infty)$

$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}.$

3) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

$]-\infty, \infty[$